



日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

ストレス状況を勘案した相関構造とリスク合算

吉羽要直*

toshinao.yoshiba@boj.or.jp

No.13-J-4
2013年3月

日本銀行
〒103-8660 日本郵便（株）日本橋郵便局私書箱 30号

* 金融機構局

日本銀行ワーキングペーパーシリーズは、日本銀行員および外部研究者の研究成果をとりまとめたもので、内外の研究機関、研究者等の有識者から幅広くコメントを頂戴することを意図しています。ただし、論文の中で示された内容や意見は、日本銀行の公式見解を示すものではありません。

なお、ワーキングペーパーシリーズに対するご意見・ご質問や、掲載ファイルに関するお問い合わせは、執筆者までお寄せ下さい。

商用目的で転載・複製を行う場合は、予め日本銀行情報サービス局 (post.prd8@boj.or.jp) までご相談下さい。転載・複製を行う場合は、出所を明記して下さい。

ストレス状況を勘案した相関構造とリスク合算*

吉羽 要直[†]

2013年3月

【要 旨】

金融機関の多くでは、株式と債券を含む有価証券ポートフォリオの市場リスク量を計算する場合に分散効果を勘案している。本邦のように、過去十数年間、金利と株価の変動に正の相関がみられる場合などには、現行実務で用いられている手法を用いたポートフォリオ全体の市場リスク量は、株式・債券それぞれ単体でのリスク量の和と比較した場合に無視できない差が発生し得る。しかし、近年の欧州債務危機で観察されているように、株価が下落するとともに金利が上昇するような状況では、分散効果は限定的になることが考えられる。そこで、本稿では、コピュラ概念を用いて株式・債券単体のリスクとリスクの相関構造を分離して計測する。具体的には、相関構造の裾依存性や正負の相関を勘案できる様々なコピュラを取り上げ、コピュラを推定するデータについても時点や地域を変えながらリスク量を計測する。このように、相関構造に関してストレス状況を勘案し、合算ポートフォリオのリスク量計測に関する特徴や留意点を示す。

キーワード：コピュラ、多変量分布、裾依存性、リスク合算、経済資本

* 本稿の作成の過程では、塚原英敦教授（成城大学経済学部）・西田雅彦氏（みずほ第一フィナンシャルテクノロジー）を始め2013年2月28日に行われた「リスク計測の高度化」ワークショップの参加者などから多くの有益なコメントを頂戴した。記して感謝したい。ただし、ありうべき誤りは筆者個人に属する。本稿の内容と意見は、筆者個人に属するものであり、日本銀行および金融機構局の公式見解を示すものではない。

[†] 日本銀行金融機構局（toshinao.yoshiba@boj.or.jp）

目 次

| | |
|---------------------------------|----|
| 1. はじめに..... | 3 |
| 2. 基礎概念の整理..... | 4 |
| (1) リスクファクターの設定 | 4 |
| (2) リスクファクターの周辺分布とリスク計測期間 | 4 |
| (3) コピュラ | 7 |
| (4) リスク量の信頼水準と分散効果率 | 12 |
| 3. データ分析..... | 13 |
| (1) 現行実務での合算リスク量の算出手法 | 14 |
| (2) 平時データでの相関構造 | 15 |
| (3) 欧州周縁国データでの分析 | 19 |
| (4) 本邦 1990 年度データでの分析 | 24 |
| (5) データ分析から得られるインプリケーション | 26 |
| 4. おわりに..... | 27 |
| 補論 1. 2 変量コピュラの構成..... | 31 |
| 補論 2. コピュラ推定の際の周辺分布..... | 34 |
| 参考文献..... | 35 |

1. はじめに

金融実務では、保有するポートフォリオのリスク量を把握するため様々なリスク合算が行われている。グローバルに活動する大手金融機関では、信用リスクと市場リスク、さらにはオペレーショナルリスクの合算に際してリスク間の相関構造を考慮した合算リスクを把握し、全行的な経済資本算出に活用している。本邦の地域金融機関では、信用リスクと市場リスクの合算は単純合算で把握することが多いが、市場リスクの範囲では、金利変動と株式価格変動の相関を前提に、債券と株式の合算リスクを算出していることが多い。

本邦の近年のデータでは、金利変動と株価変動に正の相関（株価が下落するときに金利も低下＜債券価格は上昇＞すること）が観察される。このため、債券と株式を含むポートフォリオの市場（価格変動）リスクをバリュー・アット・リスク（value-at-risk、VaR）や期待ショートフォール（expected shortfall、ES）などで示されるリスク量で算出すると、合算ポートフォリオの VaR や ES は、債券・株式それぞれの VaR や ES の単純合算値よりも小さな値になり（これを「分散効果」と呼ぶ）、場合によっては単純合算値の半分程度になる。

しかし、こうした合算ポートフォリオのリスク評価は、計測方法によってはリスク量を過小評価する可能性が高い。例えば、分散共分散法（VCV法）では、株価と金利の変動に伴うリスク合算を考える場合、株価と金利の間の相関を 1 つの数値（線形相関）で把握しているが、金利と株価の変動幅や変動方向によって相関は変わる可能性がある。

この問題に対処する方法として、コピュラと呼ばれる概念を用いたリスク合算が利用されている。コピュラは、変量間の相関構造を 1 つの数値ではなく関数として柔軟に表現したものである。コピュラを用いれば、変化幅が小さい場合（平時）と変化幅が大きい場合（ストレス状況）とで相関関係が変わることを表現できる。例えば、Basel Committee on Banking Supervision [2010]では、ストレス状況を踏まえてリスク合算を行う 1 つの方法として、幾つかのパラメトリックなコピュラを取り上げ、その利用法を紹介している。

こうしたコピュラの考え方を応用して、ストレス状況をリスク計測に織り込むことも考えられる。例えば、観測期間の全てのデータに 1 つの相関を適用するのではなく、複数の相関があると仮定したコピュラを想定することが考えられる。こうすると、平均的に見れば正の相関となるデータからも負の相関の要

素を取り出し、合算リスク量の算出に繋げることができる。あるいは、株価・金利それぞれの将来変動は近年の変動データを基に推定する一方、両者の相関構造を表すコピュラは時期や地域の異なる市場データから推定するという考え方もある。近年の欧州債務危機でスペインやイタリアなどで経験している株価と国債価格の同時下落（金利の上昇）や本邦のバブル崩壊期における同様の状況を利用してコピュラを算出し、最近のポートフォリオの合算リスク量を把握するような手法がこれに相当する。

本稿では、こうした応用的な考え方に沿って、市場のストレス状況を勘案したコピュラを利用し、合算ポートフォリオにおけるリスク量を分析する。

以下、2節ではポートフォリオのリスク量把握とコピュラの関係等について基礎概念を整理する。3節ではデータ分析の準備を行った上で、様々な地域・時期のデータを用いてコピュラの推定を行い、ポートフォリオのリスク量や分散効果率について考察する。4節では本稿で得られた結果を整理する。

2. 基礎概念の整理

(1) リスクファクターの設定

株式と債券の合算ポートフォリオについて、VaR や ES のリスク量を把握するためには、まず、ポートフォリオの価値変動の要因となるリスクファクターを設定する必要がある。株式ポートフォリオについては、業種や格付け別に複数のファクターを設定したり、個別株の変動をファクターとすることがあるが、本稿では 1 つの株価インデックスの変動がリスクファクターであると考え、日経平均株価の日次変化率（対数価格の変化幅）を採用する。また、債券ポートフォリオについては、期間別に複数のリスクファクターを設定することがあるが、本稿では 5 年国債金利の日次変化幅のみをリスクファクターとする¹。これは、5 年割引債のみを保有しているとの想定になる。

(2) リスクファクターの周辺分布とリスク計測期間

イ. リスクファクターの周辺分布

各リスクファクター（株価の日次変化率、金利の日次変化幅）の単独の分布

¹ 各国の 5 年国債の金利は Bloomberg による算出値を利用している。

(周辺分布)を表す手法としては、様々な確率分布が候補となる。分散共分散法 (VCV 法) では正規分布を想定しており、ヒストリカル法 (HS 法) では過去の実績に基づく経験分布を想定している。もっとも、正規分布では現実に観測される分布の歪みや尖りを捉えられないという問題がある。また、経験分布では、最大値以上のデータについて確率が付与されないほか、変化がない状況が多い場合にゼロ点で累積確率が大きくジャンプするという問題がある²。

本稿では、こうした点を克服するため、歪みと尖りを捉えられるパラメトリックな分布として、1次元のスキュー t 分布³を周辺分布に採用する⁴。

リスクファクターの周辺分布については、最近 5 年間 (2007/10/1~2012/10/1 日) のリターン (株価は対数前日差、金利は前日差) を観測データとして用いて、最尤法によりスキュー t 分布のパラメータを推定する (表 1)。

表 1 推定パラメータと 99%点

| | 位置(μ) | 尺度(σ) | 形状(λ) | 自由度(ν) | 99%点 |
|----|-------------|----------------|-----------------|--------------|----------|
| 株価 | 0.002832 | 0.012462 | -0.267 | 3.625 | -0.05215 |
| 金利 | -0.000030 | 0.000148 | 0.129 | 2.900 | 0.00071 |

表 1 の推定パラメータによる密度関数をプロットすると、図 1 のようになり、

² 同順位 (タイ) データの問題については、戸坂・吉羽 [2005]の 6(1)節を参照。

³ 本稿では、Azzalini and Capitanio [2003]で示されている 1次元のスキュー t 分布を採用する。この分布は、位置パラメータ μ 、尺度パラメータ σ 、自由度パラメータ ν 、歪みパラメータ λ の 4つのパラメータを持つ分布で、密度関数は、

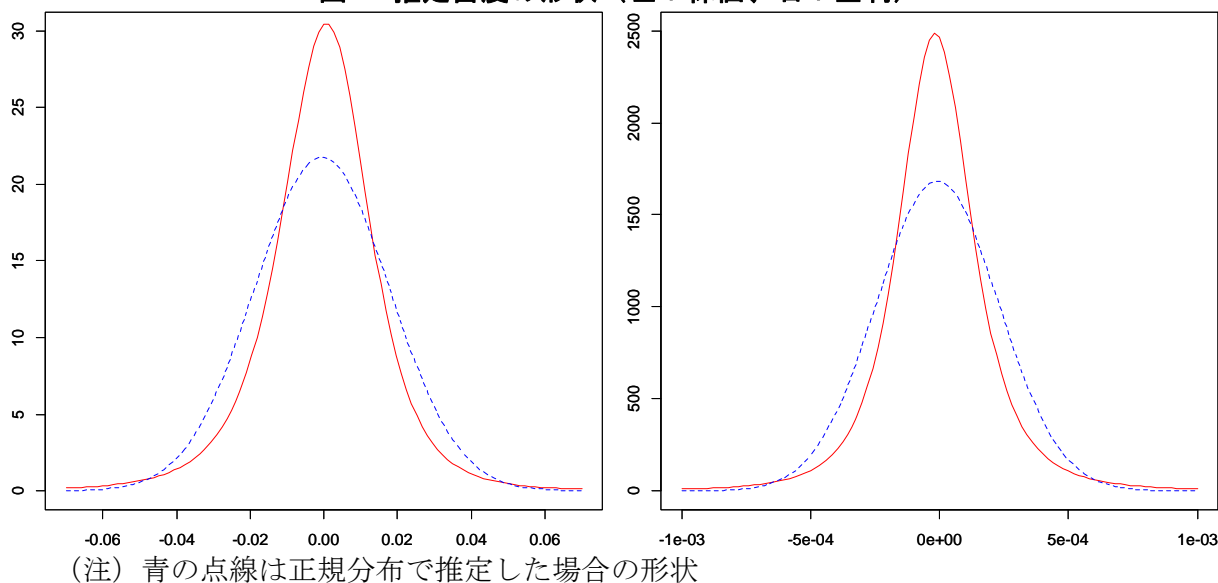
$$f(x) = \frac{2}{\sigma} t_{1,\nu} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) T_{1,\nu+1} \left(\lambda \frac{x-\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{\nu+1}{(x-\mu)^2/\sigma^2 + \nu}} \right)$$

と表現される。ただし、 $t_{1,\nu}(\cdot)$ は自由度 ν の t 分布の密度関数であり、 $T_{1,\nu+1}(\cdot)$ は自由度 $\nu+1$ の t 分布の分布 (累積密度) 関数である。歪みパラメータ λ を 0 にすると t 分布に帰着し、さらに ν が大きくなると正規分布に近づく。すなわち、正規分布、 t 分布、スキュー正規分布などを包含する分布になっている。1次元スキュー t 分布として現時点では Azzalini and Capitanio [2003]によるものが統計学では有名であるが、計量経済ではより古く Hansen [1994] や Fernández and Steel [1998]で「スキューした」 t 分布が提案されており、こちらの「スキュー」 t 分布が用いられることもある。渡部・佐々木 [2006]や中村・横内 [2010]はこちらの分布を用いている。異なる定義の「スキュー」 t 分布については Aas and Haff [2006]が詳しい。

⁴ 久保田 [2009]は、尖りを捉えられるパラメトリックな分布として両側指数分布 (ラプラス分布) の採用を提唱しており、Miura and Oue [2000]は、円ドル為替相場の日次変化率についてロジスティック分布等の分布の当てはまりを検証している。磯貝 [2013]は、大きなファットテイル性と歪みを捉えられる切断安定分布を想定し、その推定を行った上で、様々な信頼水準の VaR や ES の検証を行っている。本稿の分析でもリスクファクターの周辺分布に切断安定分布を採用することは可能であるが、切断点の設定に恣意性が入ることや切断安定分布の推定は比較的難しいことから、本稿ではスキュー t 分布を採用した。

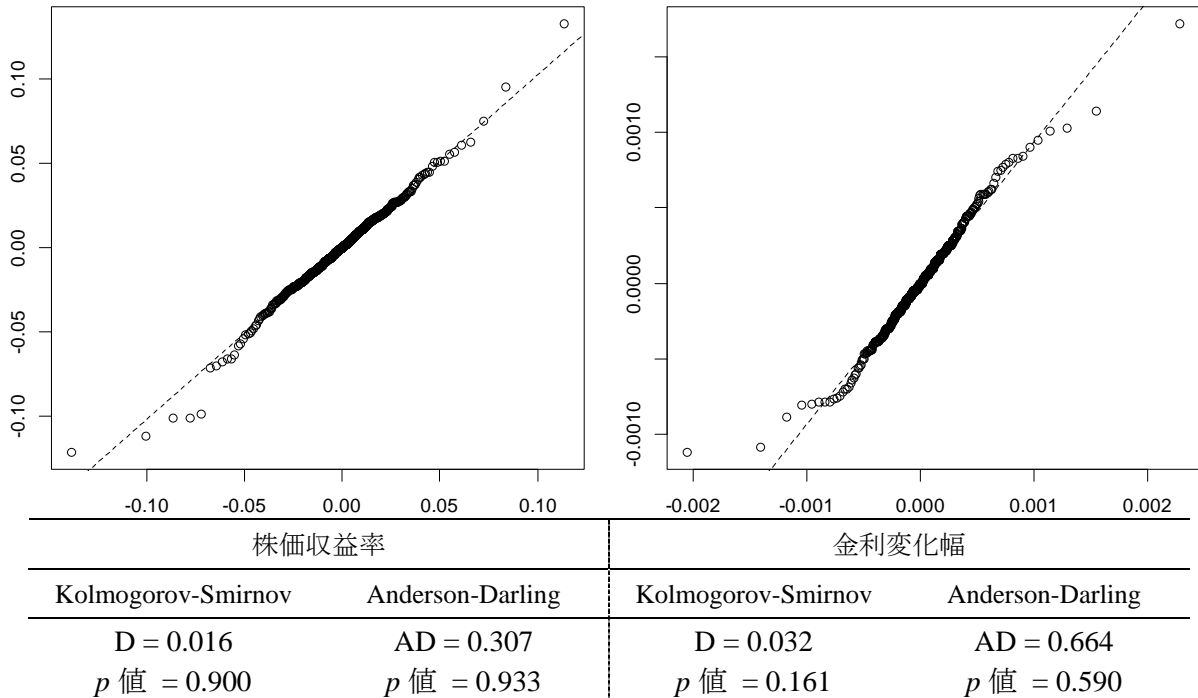
正規分布に歪みと尖りを加えたスキュー t 分布の密度は正規分布の密度と大きく異なっていることがわかる。特に、自由度のパラメータ ν は株価 3.6、金利 2.9 とかなり小さな値となり、正規分布と比べて分布の裾が非常に厚い分布であることがわかる⁵。また、推定したスキュー t 分布の適合度を検定すると（図 2）、10%有意水準でも棄却されないため、スキュー t 分布を周辺分布として議論を進める。

図 1 推定密度の形状（左：株価、右：金利）



⁵ 自由度のパラメータ ν が2以下では分散（2次モーメント）が発散し、4以下では尖度（4次モーメント）が発散するほどファットテイルである。

図 2 推定分布の QQ プロットと適合度検定 (左 : 株価、右 : 金利)



(注) 上図の QQ プロットでは横軸がスチューデント分布の理論値、縦軸がデータを示している。下表の適合度検定では帰無仮説 H_0 を「スチューデント分布に従う」とし、 p 値が低い場合、帰無仮説が棄却される。

ロ. リスク計測期間

本稿では、リスク計測期間（保有期間）は観測データの頻度に合わせて 1 日とする。リスク計測期間を観測データの頻度と違う期間にする場合は分布の時系列方向に関する独立性の検証が必要になるが、本稿では議論を単純化するため、リスク計測期間は観測データの頻度に合わせ、時系列方向には独立に同一の分布に従うと仮定して議論を進める。

(3) コピュラ

イ. 基本的な概念

コピュラとは、変量間の相関構造を示す関数である。最も簡単な相関構造としては線形相関がよく知られている。線形相関では、2 変量の相関の強さを $-1 \sim 1$ の 1 つの数値で表現する。これに対して、コピュラは変量間の関係に関数で表現するため、相関の強さを変量の大きさによって変えることができる。

コピュラは、複数変量の同時分布について、その同時分布関数を各変量単体の分布（周辺分布）の関数として表現したものである。周辺分布は、ある第 j 変量の変数 X_j が一定値 x_j 以下となる累積確率 $F_j(x_j) = \Pr(X_j \leq x_j)$ で表現されるため、0 から 1 の値をとる。また、同時分布関数 $\Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$ は、複数の変量が同時に一定値以下となる累積確率であり、コピュラ $C(u_1, \dots, u_d)$ を用いると、各変量が連続確率変数であるときには、

$$\Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d) = C(\Pr(X_1 \leq x_1), \dots, \Pr(X_d \leq x_d)) \quad (1)$$

と表現される。コピュラは、各変量の確率積分変換 (probability integral transform) $U_j = F_j(X_j)$ の同時分布関数となっている。したがって、元々の変量が同時に下限（例えば $-\infty$ ）に近づけば 0 に近づき、上限（例えば $+\infty$ ）に近づけば 1 に近づく。

コピュラで捉えられる相関の構造を理解するため、2 変量 ($d=2$) で考えてみる。コピュラでは、第 1 変量の確率積分変換 U_1 と第 2 変量の確率積分変換 U_2 の相関構造を捉えている。 U_1, U_2 が 0 に近い場合には $C(u_1, u_2)$ は元々の変量が同時に下限に近づく確率を示す。この確率が大きい場合を下側裾依存性が強いという。具体的には、第 1 変量 U_1 が一定値 u より小さいという条件の下で第 2 変量 U_2 が同じ値 u より小さくなる確率は下側裾依存係数 λ_L と呼ばれ、(2)式のようにコピュラ $C(u_1, u_2)$ に基づいて計算できる。

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \Pr(U_2 \leq u | U_1 \leq u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u} \quad (2)$$

逆に U_1, U_2 が 1 に近づく方向について考えると、

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \Pr(U_2 > u | U_1 > u) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad (3)$$

によって上側裾依存係数 λ_U を定義でき、その値の大きさに上側裾依存性の強さを測ることができる。

コピュラは、同時累積確率（同時分布関数）で定義されているが、形状を把握したり、最尤推定などを行う場合は累積した確率ではなく確率密度が用いられることが多い。コピュラ $C(u_1, \dots, u_d)$ に対してコピュラ密度関数 $c(u_1, \dots, u_d)$ は

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \cdots \partial u_d} \quad (4)$$

と定義される⁶。

ロ. 周辺分布とコピュラを分離する利点

通常の計量分析では、2変量の同時分布を1つのデータセットで同時に推定する。

一方、コピュラを用いた計量分析では、同時分布を周辺分布とコピュラに分解しており、周辺分布の推定とコピュラの推定を別々のデータセットで行うことができる。周辺分布とコピュラが別々に推定されても、周辺分布にコピュラを適用することでポートフォリオの同時分布を得られる。このように、分離して推定し (estimate with separation)、結合して分析する (analyze with combination) ことが可能になる点がコピュラを用いる利点である⁷。

この利点を用いると、ストレス状況におけるコピュラを推定し、平時データから推定される周辺分布と結合することで、ストレス状況の相関構造を勘案したリスク量を算出することもできる⁸。本稿では、金利や株価の単独の変動は周辺分布として近年の平時の観測データから推定している。3節のデータ分析では、様々なデータからコピュラを分離して推定し、平時のデータから推定される周辺分布を結合して、分析を行っている。

ハ. 各種のパラメトリックなコピュラの定義

母分布のコピュラを推定する際には、データの同時出現頻度 (経験同時分布) に基づくノンパラメトリックな手法と、いくつかのパラメータの関数として表現されるパラメトリックなコピュラを想定して推定を行うパラメトリックな手

⁶ コピュラ密度関数は必ずしも存在するとは限らないが、ここでは、コピュラ $C(u_1, \dots, u_d)$ が連続微分可能でコピュラ密度関数が存在することを想定している。

⁷ Meucci [2011a]は、コピュラによる伝統的な分析をこのように表現した上で、伝統的手法とは異なるアプローチを提唱している。また、Meucci [2011b]では実務家向けのわかりやすい解説を行っている。

⁸ なお、周辺分布でストレス状況を勘案することもできるが、本稿では相関構造に焦点を当て、こうした分析は行わない。周辺分布とコピュラの双方にストレス状況を勘案した分析を行う一方で、本稿のようにコピュラのみでストレス状況を勘案した分析を行えば、前者のストレステストの結果について、周辺分布による影響とコピュラによる影響とに分けて考えることができるようになる。

法がある。パラメトリックなコピュラには⁹、①生成関数と呼ばれる比較的単純な関数を組み合わせて表現するコピュラと、②多変量確率分布として統計学で頻繁に利用されている分布から構成されるコピュラがある。①のコピュラには、アルキメディアンコピュラ (Archimedean copula) と呼ばれるものがあり、②のコピュラには、楕円コピュラ (elliptical copula) と呼ばれるものがある。

アルキメディアンコピュラは、(5)式のように生成関数 $\varphi(\cdot)$ の和とその逆関数で表現できるコピュラの総称である。

$$C(u_1, \dots, u_d) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d)) \quad (5)$$

具体的なアルキメディアンコピュラには、ガンベル (Gumbel) コピュラ、クレイトン (Clayton) コピュラ、フランク (Frank) コピュラなどがある。Basel Committee on Banking Supervision [2010]でもこの3つのコピュラが取り上げられている。

これらの生成関数 $\varphi(\cdot)$ と裾依存係数は表 2 のように纏められる。いずれも、1パラメータでコピュラを表現するという共通点を持つが、上下の裾依存係数に特徴的な違いがある。すなわち、ガンベルコピュラは上側裾依存性が強く、クレイトンコピュラは下側裾依存性が強いのに対して、フランクコピュラは上下に裾依存性がなく、対称である。

表 2 アルキメディアンコピュラの生成関数と裾依存係数

| コピュラ | パラメータ | 生成関数 $\varphi(u_j)$ | 上側裾依存係数 λ_U | 下側裾依存係数 λ_L |
|-------|----------|---|---------------------|---------------------|
| ガンベル | γ | $(-\ln u_j)^\gamma$ | $2 - 2^{1/\gamma}$ | 0 |
| クレイトン | α | $(u_j^{-\alpha} - 1) / \alpha$ | 0 | $2^{-1/\alpha}$ |
| フランク | δ | $-\ln \left(\frac{e^{-\delta u_j} - 1}{e^{-\delta} - 1} \right)$ | 0 | 0 |

アルキメディアンコピュラのうち、ガンベル、クレイトンの両コピュラは、変量間の相関が正のものについて定義される。2変量の場合、負の相関のデータを扱う場合には、「変量の反転」という操作を施すことで正の相関について定義されるコピュラを適用することができる。例えば、変量が大きく変動した場合に、第 1 変量 (株価) が下落する時に第 2 変量 (金利) が上昇する相関関係が

⁹ コピュラの具体的な取扱いについては戸坂・吉羽 [2005]を参照。コピュラに関する解説としては塚原 [2008]、Joe [1997]、Nelsen [2006]が挙げられる。

強いデータがあったとする。この場合、下側裾依存性の強いクレイトンコピュラを適用するのであれば、第2変量の $1-u_2$ を u_2 と定義し直すという第2変量の反転を行って適用すればよく¹⁰、上側裾依存性の強いガンベルコピュラを適用するのであれば、第1変量の反転を行って適用する。双方の変量を反転させた場合はそのコピュラは反転コピュラと呼ばれる¹¹。2変量で正の相関があり下側依存性が強いデータについては、クレイトンコピュラのほか、反転ガンベルコピュラでもその構造を捉えることができる。

楕円コピュラは、楕円分布族に属する分布である多変量正規分布、多変量 t 分布などを用いて定義されるコピュラの総称である。多変量正規分布を用いて定義されるコピュラは正規コピュラと呼ばれ、多変量 t 分布を用いて定義されるコピュラは t コピュラと呼ばれる¹²。いずれも相関行列をパラメータとして持ち、これにより変量間の全体的な依存性を規定している。 t コピュラでは、元にして t 分布の自由度に相当するパラメータ ν を持っており、パラメータ ν は 3 以上の値をとり、パラメータ ν が大きくなると正規コピュラに近づく。2変量で考える場合、正規、 t の各コピュラの表現式と裾依存係数は表 3 のようになる。正規コピュラでは裾依存性が低く、 t コピュラではパラメータ ν の値が小さいほど裾依存性が高くなる¹³。 t コピュラでのパラメータ ν は裾依存性の強さを表すパラメータと解釈することができる。

本稿では、混合正規コピュラと呼ばれるコピュラも分析対象に加える。株価変化率と金利変化幅について相関を考えると、本邦の最近のデータの多くは正相関になっていると想定されるが、時期によっては負の相関になっている可能性もある。2変量の混合正規コピュラは、負の相関を持つ正規コピュラと正の相関を持つ正規コピュラが一定の混合比率 $\theta: 1-\theta$ で出現するコピュラである¹⁴。

¹⁰ クレイトンコピュラ密度 $c_c(u_1, u_2)$ について、 $c(u_1, u_2) = c_c(u_1, 1-u_2)$ で表現される密度のコピュラを想定する。

¹¹ 反転コピュラとは2つの変量を同時に反転させるコピュラで生存コピュラとも呼ばれる。すなわち、あるコピュラ密度 $\hat{c}(u_1, u_2)$ について反転したコピュラは、 $c(u_1, u_2) = \hat{c}(1-u_1, 1-u_2)$ を密度とするコピュラとして表現される。

¹² 正規コピュラ、 t コピュラについても Basel Committee on Banking Supervision [2010] で取り上げられている。

¹³ この点は ρ を一定値に置いたとき、 ν が 3 のときに $t_{\nu+1}(-\sqrt{(1-\rho)(\nu+1)/(1+\rho)})$ の値が一番大きく、 ν を大きくするとこの値が小さくなることからわかる。

¹⁴ 2変量の混合正規コピュラの構成方法については、補論 1 を参照。

表 32 変量の正規・ t ・混合正規コピュラと裾依存係数

| コピュラ | パラメータ | 表現式 | 裾依存係数 $\lambda_U = \lambda_L$ |
|------|--------------------------|--|---|
| 正規 | ρ | $\Phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2) \rho)$ | 0 |
| t | ρ, ν | $\mathbf{t}_\nu(t_\nu^{-1}(u_1), t_\nu^{-1}(u_2) \rho)$ | $2t_{\nu+1}\left(-\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{1+\rho}}\right)$ |
| 混合正規 | θ, ρ_1, ρ_2 | $\theta\Phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2) \rho_1)$ $+ (1-\theta)\Phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2) \rho_2)$ | 0 |

(注) $\Phi(\cdot, \cdot | \rho)$ は平均 0、分散 1 で相関 ρ の 2 変量正規分布の分布関数。 $\mathbf{t}_\nu(\cdot, \cdot | \rho)$ は自由度 ν 、相関 ρ の 2 変量 t 分布の分布関数。 $\Phi^{-1}(\cdot)$ は 1 変量標準正規分布関数の逆関数。 $t_\nu(\cdot)$ は 1 変量 t 分布の分布関数で、 $t_\nu^{-1}(\cdot)$ はその逆関数。

(4) リスク量の信頼水準と分散効果率

本稿では、リスク量として、99%水準の VaR と 97.5%水準の ES を採用する。また、リスク量を計算するポートフォリオについては、本邦の地域金融機関の平均的な保有額を参考に、債券 7000 億円（全額 5 年割引債）、株式 500 億円とする。

株の持ち高を AS 、債券の持ち高を AB とする。株価（対数値）が $\ln S_t \rightarrow \ln S_t + \Delta S$ 、5 年金利が $r_t \rightarrow r_t + \Delta r$ と変化したとする。ポートフォリオ価値の変化 ΔPV は、 $T=5$ 年の金利を r_t として

$$\begin{aligned} \Delta PV &= AS \frac{S_t e^{\Delta S}}{S_t} + AB \frac{e^{-(r+\Delta r)T}}{e^{-rT}} - (AS + AB) \\ &\cong AS\Delta S - AB(\Delta r)T \end{aligned} \quad (6)$$

と近似できるため、(6)式右辺の下側 1%点（の逆符号の値）を 99% VaR とする。同様に(6)式右辺の下側 2.5%点まで（の逆符号の値）について平均値をとって 97.5%ES とする。 $(\Delta S, \Delta r)$ は、特定したコピュラから各変量の累積確率をシミュレートし、その累積確率に対応する周辺分布の分位点を求めることによって求められる。

株、債券、それぞれで 99% VaR を考えると、株では ΔS が 1%タイル値（下落）をとった場合、債券では Δr が 99%タイル値（上昇）をとった場合の損失（時価変化）が 99% VaR となる。株式・債券について、持ち高 AS 、 AB と債券の期間 ($T=5$ 年) を考慮し、(6)式の $(\Delta S, \Delta r)$ に表 1 の 99%点を適用して足し合わせたものが

単純合算 VaR である。本稿の例では表 4 のように単純合算 VaR は 50.8 億円となる。VaR が劣加法性を満たすという条件のもとでは¹⁵、これが最大の VaR となる。

97.5%ES を考える場合、単純合算 VaR と同様に、株式・債券について、持ち高 AS 、 AB と債券の期間 ($T=5$ 年) を考慮し、(6)式の $(\Delta S, \Delta r)$ として、 ΔS には下落率の大きな 2.5% の平均値、 Δr には上昇幅の大きな 2.5% の平均値を適用して足し合わせたものが単純合算 ES であり、ここでは表 4 のように 55.9 億円となる。ES は劣加法性を満たすため、これが最大の ES となる。

表 4 債券・株式単独の VaR と ES およびその単純合算

| VaR(99%) | | ES(97.5%) | |
|----------|---------|-----------|---------|
| 債券のみ | 株式のみ | 債券のみ | 株式のみ |
| 24.7 億円 | 26.1 億円 | 27.7 億円 | 28.2 億円 |
| 単純合算 | | 単純合算 | |
| 50.8 億円 | | 55.9 億円 | |

合算 VaR の単純合算 VaR からの削減率および合算 ES の単純合算 ES からの削減率を分散効果率と呼ぶ。

3. データ分析

本節では、コンピュータを用いたデータ分析を行う。まず、データ分析の準備として観測データの周辺分布についての特徴を確認する。次に、最近の本邦データ（平時データ）での相関構造とその分析を行う。さらに、欧州債務危機問題が深刻化した時期のスペインとイタリアのデータを用いた相関構造での分析、本邦において株価と債券の同時下落が発生した 1990 年前後のデータを用いた相関構造での分析を行う。なお、様々なコンピュータの適合度を比較する際には¹⁶、BIC (Schwarz の Bayesian information criteria) を用いて判定する¹⁷。

¹⁵ 劣加法性とは、合算ポートフォリオのリスク量がサブポートフォリオのリスク量の単純合算値（ここでは、債券単独のリスク量と株式単独のリスク量の和）以下になるという性質である。VaR は理論的には劣加法性を満たすとは限らないが、Danielsson *et al.* [2013]などで通常は劣加法性を満たすことが示されている。

¹⁶ 後述のように本稿では適合度は情報量規準で比較している。推定したコンピュータの疑似標本との適合度についての検定は様々なものが提案されているが、本稿では分析を行わない。詳しくは Kojadinovic, Yan, and Holmes [2011]などを参照。

¹⁷ どのコンピュータのモデルが良いかは、AIC (Akaike information criteria) や BIC などの情報量規準で判断されることが多い。BIC は、最尤推計により求めた最大対数尤度を $\ell(\xi)$ 、パラメータ数を p 、サンプルサイズ (観測データの数) を N として、 $-2\ln \ell(\xi) + p \ln N$ で求

(1) 現行実務での合算リスク量の算出手法

金融機関で主に使われる VaR 算出手法としては、分散共分散法 (VCV 法) とヒストリカルシミュレーション法 (HS 法) が用いられる。この 2 つの手法で合算ポートフォリオの 99% VaR および 97.5% ES を求めた結果は表 5 のとおりである。

コンピュータの観点から見ると、HS 法は平時のノンパラメトリックなコンピュータ、VCV 法は平時の正規コンピュータを捉えていることに相当する。

表 5 合算 VaR と合算 ES

| | VaR(99%) | 分散効果率 | ES(97.5%) | 分散効果率 |
|------|----------|-------|-----------|-------|
| 単純合算 | 50.8 | — | 55.9 | — |
| VCV法 | 23.0 | ▲55% | 23.1 | ▲59% |
| HS法 | 30.2 | ▲41% | 32.7 | ▲42% |
| 相関法 | 28.7 | ▲44% | 31.6 | ▲44% |

VCV 法による分散効果率は、VaR では▲55%、ES では▲59%と、かなり大きな分散効果が計測されている¹⁸。一方、HS 法による分散効果率は、VaR で▲41%、ES では▲42%と、VCV 法よりは分散効果は小さい。

この差の原因を検討するため、さらに 3 つ目の VaR 算出手法を導入する (以下、相関法と呼ぶ)。すなわち、VCV 法は、①各ファクターの周辺分布として正規分布を仮定し、②ファクター間の相関構造 (コンピュータ) は線形相関で捉える。一方、HS 法は、①各ファクターの周辺分布として経験分布を仮定し、②ファクター間の相関構造 (コンピュータ) も経験同時分布から導出される。相関法は、①周辺分布として経験分布に近い分布を採用する一方、②ファクター間の相関は VCV 法で用いられている線形相関で捉える¹⁹。相関法で用いる周辺分布を、経

められ、値が低いモデルほど良いと判断できる。あるコンピュータの「適合度が高い」とは、正確には、当該コンピュータが「情報量規準 BIC の観点で選択される」という意味である。本稿での分析はいずれもサンプルサイズは 2 桁以上であり、新谷・山田・吉羽[2010]に倣い、AIC よりもパラメータ数に対するペナルティが高くなる情報量規準 BIC を採用している。

¹⁸ 分散効果率は▲が付されているが、その絶対値が大きい (小さい) ときに、「分散効果 (率) が大きい (小さい)」という。

¹⁹ 表 1 の 99%点を $\Delta S_{1\%}$ 、 $\Delta r_{99\%}$ と表現すると、相関行列 Ω を用いた相関法による VaR は $\sqrt{(AS\Delta S_{1\%}, -AB(\Delta r_{99\%})T)\Omega(AS\Delta S_{1\%}, -AB(\Delta r_{99\%})T)^T}$ で計算される。同様に、株価変動の下側 2.5%の平均値を $\overline{\Delta S}_{2.5\%}$ 、金利変動の上側 2.5%の平均値を $\overline{\Delta r}_{97.5\%}$ と書き表すと、株式単独の 97.5%ES は $-AS\overline{\Delta S}_{2.5\%}$ 、債券単独の 97.5%ES は $AB(\overline{\Delta r}_{97.5\%})T$ と表現され、相関法

験分布に近く歪みと尖りを捉えられるスキュー t 分布で近似して推定すると、分散効果率は▲44%となり、HS法（▲42～41%）に近い結果が得られる。

また、VCV法の分散効果について検討を進めるため、ファクターの周辺分布が正規分布であるとの前提で、単純合算値と分散効果を算出すると、表6のとおり、分散効果率は▲43%となり、表5の相関法の分散効果率とほぼ等しくなる。

表 6 VCV法の分散効果

| VaR(99%) | | ES(97.5%) | | |
|----------|---------|-----------|-----------|-------|
| 債券のみ | 株式のみ | 債券のみ | 株式のみ | |
| 19.3 億円 | 21.3 億円 | 19.4 億円 | 21.4 億円 | |
| VaR(99%) | | 分散効果率 | ES(97.5%) | 分散効果率 |
| 単純合算 | 40.6 | — | 40.8 | — |
| VCV法 | 23.0 | ▲43% | 23.1 | ▲43% |

以上の結果から、周辺分布に正規分布を想定しているVCV法は、分布のファットテイル性を捉えていないため、リスクを過小評価し、分散効果を過大評価する可能性が高い。

次項からは、周辺分布については全てスキュー t 分布に揃え、コピュラの違いによって生じる分散効果の違いを考察する。

(2) 平時データでの相関構造

イ. 分析対象のコピュラ

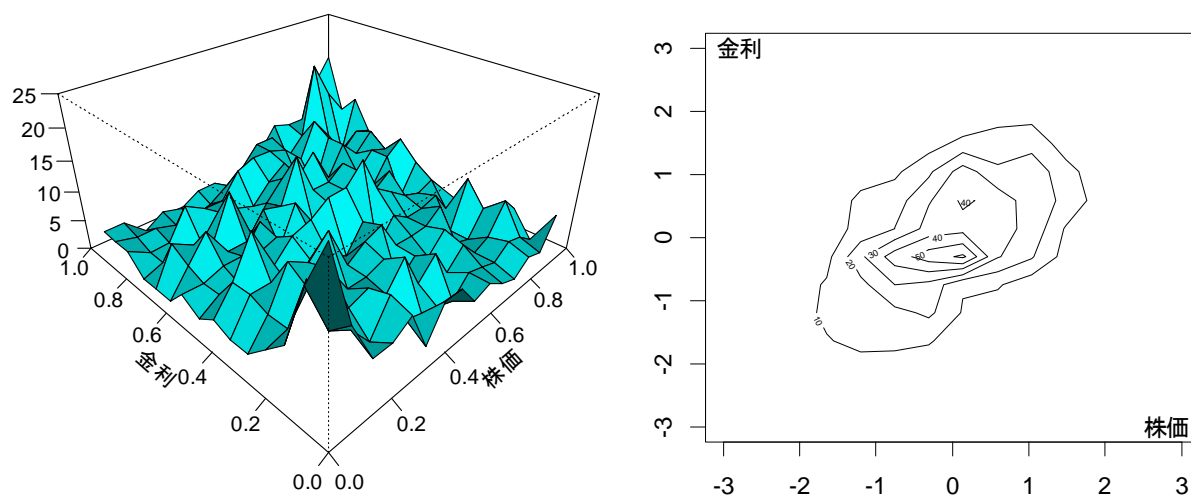
ここでは、平時データの相関構造（コピュラ）を比較する。まず、実際の分布に基づくノンパラメトリックなコピュラは図3のようになる。図3の左図では、手前側が0になっており金利や株価が下落する方向になっている。図3の左図ではその頻度が相対的に多く、株価が下落したときに債券価値が上昇し損失が相殺されやすいことを示している²⁰。図3の右図は、株価変動・金利変動の周辺分布について左図で[0,1]の累積確率で表現されているものを、標準正規分布

によるESは $\sqrt{(AS\Delta S_{2.5\%}, -AB(\Delta r_{97.5\%})T)\Omega(AS\Delta S_{2.5\%}, -AB(\Delta r_{97.5\%})T)^T}$ で計算される。相関法はリスクカテゴリーを跨る合算リスク量を算出して全行的に必要な経済資本を算出する場合によく用いられる手法である。

²⁰ 図3左図の作成方法については補論1を参照。

での値に直して、その同時密度の等高線を描いたものである²¹。等高線は、右上がりの楕円形に近く、このデータが正の相関を持つことがわかる。

図 3 平時データの疑似標本のヒストグラムと等高線



(注) 右図の等高線は周辺分布を標準正規分布として同時密度の等高線を描いたもの。

次に、パラメトリックなコピュラの最尤推定を行うと、BIC の観点からは混合正規コピュラの適合度が最も高い (BIC : -313.0) ことがわかる (表 7)。なお、念のため、裾依存性が上側で強いのか、下側で強いのかを確認するため、ガンベルコピュラ、クレイトンコピュラについては、反転させたコピュラも想定し、パラメータを推定する。結果をみると、ガンベルと反転ガンベルを比較すると反転ガンベル、クレイトンと反転クレイトンではクレイトンの方がそれぞれ BIC が低く (適合度が高い)、本邦の株式と金利に関する平時データでは、下側裾依存性が強いことがわかる。とはいうものの、パラメータ数が 1 である 6 つのコピュラ (<反転>ガンベル、<反転>クレイトン、フランク、正規) では、フランクコピュラ (BIC : -282.6) と反転ガンベルコピュラ (BIC : -282.0) の適合度が高くなっている。裾依存性が全く異なるコピュラが似たような適合度になるとの結果は、平時のデータは 1 パラメータのコピュラで捉え切れない複雑な相関構造となっている可能性を示唆している。

²¹ 図 3 右図では、株価・金利いずれの軸も標準正規分布 ($\sigma=1$) での変化を示しており、 $[-1,1]$ の範囲に 68.3%、 $[-2,2]$ の範囲に 95.5%、 $[-3,3]$ の範囲に 99.7%のデータが存在する。

表 7 平時データでのコピュラの最尤推定

| | パラメータ | 推定値 | 標準誤差 | BIC |
|---------|----------|--------|-------|--------|
| ガンベル | γ | 1.385 | 0.031 | -239.8 |
| 反転ガンベル | γ | 1.416 | 0.031 | -282.0 |
| クレイトン | α | 0.662 | 0.050 | -236.8 |
| 反転クレイトン | α | 0.567 | 0.047 | -184.5 |
| フランク | δ | 3.188 | 0.189 | -282.6 |
| 正規 | ρ | 0.436 | 0.021 | -251.9 |
| t | ρ | 0.466 | 0.024 | -307.2 |
| | ν | 5.481 | 0.918 | |
| 混合正規 | ρ_1 | -0.458 | 0.124 | -313.0 |
| | ρ_2 | 0.616 | 0.026 | |
| | θ | 0.145 | 0.036 | |

ロ. 各コピュラでのリスク量と分散効果率

ここでは、前述のノンパラメトリックなコピュラと各パラメトリックなコピュラを用いて、仮想ポートフォリオの VaR と ES を計算する（表 8）²²。パラメトリックなコピュラについては、各コピュラに従う乱数を 10 万回発生させて VaR と ES を計算し、それを 100 回繰り返すことにより、各コピュラの VaR と ES の平均値と標準偏差を求めている。

表 8 平時データでのコピュラを用いた VaR と ES

| コピュラ | VaR(99%) | 標準 偏差 | 分散 効果率 | ES(97.5%) | 標準 偏差 | 分散 効果率 |
|-----------|----------|----------|-----------|-----------|----------|-----------|
| ノンパラメトリック | 30.1 | — | ▲41% | 32.4 | — | ▲42% |
| ガンベル | 26.6 | 0.30 | ▲48% | 29.0 | 0.37 | ▲48% |
| 反転ガンベル | 25.8 | 0.27 | ▲49% | 28.4 | 0.39 | ▲49% |
| クレイトン | 26.8 | 0.27 | ▲47% | 29.6 | 0.37 | ▲47% |
| 反転クレイトン | 28.1 | 0.27 | ▲45% | 30.5 | 0.36 | ▲45% |
| フランク | 28.7 | 0.29 | ▲43% | 31.8 | 0.40 | ▲43% |
| 正規 | 26.5 | 0.30 | ▲48% | 29.5 | 0.42 | ▲47% |
| t | 26.0 | 0.31 | ▲49% | 28.5 | 0.36 | ▲49% |
| 混合正規 | 42.1 | 0.43 | ▲17% | 45.5 | 0.54 | ▲19% |

まず、表 8 の結果を前掲表 5 の VCV 法、HS 法の 2 つの算出方法と比べると、9 つのコピュラでの分散効果率は▲49～17%（VaR：25.8～42.1）に止まり、VCV 法の分散効果率（前掲表 5、▲55%）よりも小さい。3（1）節でも述べたよう

²² ここで、周辺分布（スキュー t 分布）の分位点については 50 万回の乱数で評価している。Christoffersen *et al.* [2012]でも、異なる定義のスキュー t 分布について、分位点が解析的に評価されていないことから、10 万回の乱数を発生させて分位点を評価している。

に VCV 法が周辺分布にファットテイルではない正規分布を想定しているために、リスクを過小評価し、分散効果を過大評価していると考えられる。また、ノンパラメトリックなコピュラ（分散効果率：▲41%、VaR：30.1）については、設定のとおり HS 法（前掲表 5、分散効果率：▲41%、VaR：30.2）とほぼ一致している²³。

次に、表 8 の中で正規コピュラ（分散効果率：▲48%、VaR：26.5）と t コピュラ（分散効果率：▲49%、VaR：26.0）を比較すると、正規コピュラの方が予想に反して分散効果は小さい。前述のように、 t コピュラのパラメータ ν を小さく設定することは、変量間（ここでは株価変動と金利変動）の裾依存性を強くすることを意味する。2 変量（株式変動率と金利変動幅）が大きく変動する際に、両者間に負の相関が強ければ、株式と債券を保有しているポートフォリオの分散効果は小さくなり、合算リスク量は大きくなると考えることが自然である。しかし、測定結果はこうした先入観とは逆になっている。これはコピュラの裾依存性によって、株価下落時に金利も下落して債券価値が上昇する変動も強められ、結果的に分散効果を大きくする効果を生み出しているためと考えられる。金融機関の経済資本算出実務においては、リスク量を大き目に見積もる「保守性の観点」からパラメータ ν を低く設定した t コピュラを用いる例が散見されるが、今回の試算結果はこうした実務慣行が必ずしも適切ではない場合があることを示唆している²⁴。

また、混合正規コピュラについては、分散効果率（VaR：▲17%、ES：▲19%）は他のコピュラでの半分以下になっており、VaR（42.1）や ES（45.5）は他のコピュラでのリスク量（VaR：25.8～30.8）の 1.5 倍程度に達している。混合正規コピュラは、正の相関と負の相関を別々に考慮することができるため、1つの相関しか推定できない他のコピュラよりもデータへの当てはまりが良くなりやすい。推計結果をみると、正の線形相関が観察される本邦平時データの中で、負の相関を勘案する混合比率 θ が 14.5% ある。この部分が分散効果を小さく見積も

²³ 平時データでは、「コピュラを分離抽出する際の周辺分布」と「結合して同時分布を生成する際の周辺分布」が一致しているため、ノンパラメトリックなコピュラと HS 法でのリスク量算出方法は基本的に一致する。ただし、コピュラを分離抽出する際の周辺分布関数値については精緻に求めているのに対し、結合する周辺分布の分位点は脚注 22 のように乱数で近似評価しているため、その誤差がリスク量の違いとして現れる。

²⁴ アルキメディアンコピュラの中で上下対称で裾依存性を持たないフランクコピュラのリスク量（VaR：28.7）が、下側裾依存性の強い反転ガンベル（同：25.8）やクレイトン（同：26.8）よりも大きくなることも、同じ理由で説明される。

り、合算リスク量を大きくしたと考えられる。ただし、情報量規準ではパラメータ数の多いコピュラの方が適合度は高くなる傾向を持つため、将来の相関構造を十分表現しているとは限らない点には留意する必要がある。

(3) 欧州周縁国データでの分析

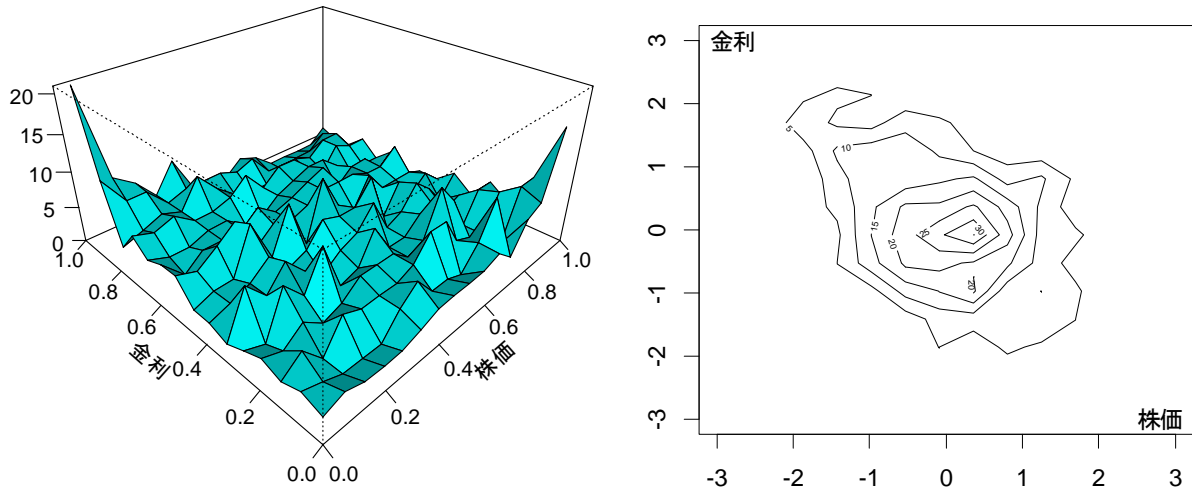
ここでは、近年の欧州債務危機問題で国債金利が上昇したスペインとイタリアのデータを用いて、コピュラを抽出する²⁵。具体的には、最近3年間(2009/10/1～2012/10/1日)の変動(株価は対数前日差、金利は前日差)について、まず周辺分布を推定し(コピュラを求める際の周辺分布の詳細は補論2)、推定された周辺分布の分布関数を用いてリターンデータを[0,1]の累積確率に変換し、コピュラを分離抽出する。

イ. スペインデータ

まず、株価にはIBEX35指数を採用し、ノンパラメトリックなコピュラのヒストグラムと各変量を標準正規分布とした場合の等高線を描く(図4)。

²⁵ 菅ら [2012]の分析は、最近のイタリアの相関やバブル崩壊期の本邦での相関が実現した場合のリスク量を算出している点で、本節の分析と似ているが、以下のような違いがある。菅ら [2012]は、株価が幾何ブラウン運動、金利が拡張バシチェックモデルに従うとの仮定を置いている。これは、①株価変化率と金利変化幅がそれぞれ正規分布に従うと仮定しており、②株価変化率と金利変化幅の相関構造は正規コピュラであり、③時系列方向については独立性が前提との仮定である。本稿では、①については正規分布よりも現実的な分布を想定し、②コピュラについては正規コピュラ以外のものも考慮しており、③の時系列の独立性についてはその検証が別の分析となるため、考慮の対象外としている。菅・福田・杉原 [2013]では、菅ら [2012]の設定の下、平均・分散分析に基づいて最適な債券と株式のポートフォリオ配分を求めている。

図 4 スペインデータの疑似標本のヒストグラムと等高線



(注) 右図の等高線は周辺分布を標準正規分布として同時密度の等高線を描いたもの。

次に、パラメトリックなコピュラの最尤推定を行う。なお、スペインのデータでは、株価変動と金利変動のリスクファクターの間には明確な負の相関が観察されるため、ガンベルコピュラ、クレイトンコピュラについては、金利ないし株価を反転させたコピュラのパラメータを推定する²⁶ (表 9)。推計結果をみると、BIC の観点からは t コピュラの適合度が最も高い (BIC : -155.4) との結果が得られた²⁷。また、ガンベルコピュラの中で比較すると株価を反転させたコピュラの BIC が低く、クレイトンコピュラの中で比較すると金利を反転させたコピュラの BIC が低い。ガンベルコピュラは上側裾依存性が強く、クレイトンコピュラは下側裾依存性が強いことを思い起こすと、この結果は、株価下落と金利上昇が同時に生じる裾依存性の方が、株価上昇と金利下落が同時に生じる裾依存性よりも強いことを示しているといえる。

²⁶ 第 1 変量が株価変動、第 2 変量が金利変動を示していることから、あるコピュラ密度 $\hat{c}(u_1, u_2)$ について、金利を反転させたコピュラは $c(u_1, u_2) = \hat{c}(u_1, 1 - u_2)$ 、株価を反転させたコピュラは $c(u_1, u_2) = \hat{c}(1 - u_1, u_2)$ で表現される。

²⁷ アルキメディアンコピュラの中ではガンベルコピュラの適合度が高い。これはガンベルコピュラがアルキメディアンコピュラの中で唯一の極値コピュラであることが背景にあると考えられる。極値コピュラは、各変量の最大値同士の相関構造がデータ数を多くしたときに収束する相関構造を持つコピュラであり、理論的にストレス状況との整合性が高い。詳しくは、McNeil, Frey, and Embrechts [2005]を参照。

表 9 スペインデータを用いたコピュラの最尤推定

| | パラメータ | 推定値 | 標準誤差 | BIC |
|-------------|----------|--------|-------|--------|
| ガンベル(金利反転) | γ | 1.339 | 0.037 | -142.1 |
| ガンベル(株価反転) | γ | 1.354 | 0.037 | -144.9 |
| クレイトン(金利反転) | α | 0.581 | 0.059 | -123.5 |
| クレイトン(株価反転) | α | 0.537 | 0.058 | -112.0 |
| フランク | δ | -2.554 | 0.231 | -115.1 |
| 正規 | ρ | -0.419 | 0.027 | -142.0 |
| t | ρ | -0.403 | 0.034 | -155.4 |
| | ν | 5.267 | 1.370 | |
| 混合正規 | ρ_1 | -0.531 | 0.035 | -146.5 |
| | ρ_2 | 0.703 | 0.132 | |
| | θ | 0.885 | 0.038 | |

次に、スペインのデータによるノンパラメトリック並びにパラメトリックなコピュラを用いて、本邦平時データから得られる周辺分布（前掲表 1）を結合して、仮想ポートフォリオのリスク量（VaR と ES）と分散効果率を計算する（表 10）。

表 10 スペインデータから推定された各コピュラを用いた VaR と ES

| コピュラ | VaR(99%) | 標準 偏差 | 分散 効果率 | ES(97.5%) | 標準 偏差 | 分散 効果率 |
|-------------|----------|----------|-----------|-----------|----------|-----------|
| ノンパラメトリック | 40.1 | — | ▲21% | 39.2 | — | ▲30% |
| ガンベル(金利反転) | 39.1 | 0.37 | ▲23% | 42.2 | 0.44 | ▲25% |
| ガンベル(株価反転) | 44.4 | 0.50 | ▲13% | 48.9 | 0.60 | ▲13% |
| クレイトン(金利反転) | 44.7 | 0.47 | ▲12% | 49.1 | 0.56 | ▲12% |
| クレイトン(株価反転) | 36.8 | 0.40 | ▲27% | 39.9 | 0.49 | ▲29% |
| 正規 | 39.0 | 0.39 | ▲23% | 42.0 | 0.48 | ▲25% |
| フランク | 41.4 | 0.37 | ▲18% | 44.8 | 0.44 | ▲20% |
| t | 41.9 | 0.41 | ▲18% | 45.9 | 0.49 | ▲18% |
| 混合正規 | 43.2 | 0.42 | ▲15% | 46.7 | 0.53 | ▲17% |

表 10 を、平時データからコピュラを推定した前掲表 8 と比較すると、まず、表 10 の分散効果率は▲30～12%に止まり、平時データの場合よりも分散効果は小さいとの結果が得られた。また、リスク量では、表 10 の各コピュラを用いた場合の VaR は 36.8～44.7、ES は 39.2～49.1 であり、表 8 のリスク量よりも総じて大きい。

表 10 の中で分散効果が一番大きいのは、ノンパラメトリックなコピュラで ES を計測した場合（分散効果率：▲30%）である。このような結果が生じた背景には、ノンパラメトリックなコピュラではコピュラを抽出する際に用いる過去データで観測されたシナリオを超える損失は発生しないと想定していること

が挙げられる。ノンパラメトリックなコピュラでは、過去の 2 変量データが N 個であるとする、それらの 2 変量のシナリオが等しい確率で生じると考えている。そのため、各変量で $1/N$ 未満の確率で発生する可能性のあるシナリオは考慮されない。つまり、観測されたシナリオを超える損失は発生しないと考えていることになり、VaR 以上の損失を平均化して求める ES の算出では観測数 N が十分に大きくないと過小評価に繋がる。

表 10 の中でアルキメディアンコピュラ（ガンベル、クレイトン、フランク）を比較すると、表 8 の場合とは逆に、上下対称で裾依存性を持たないフランクコピュラのリスク量（VaR : 39.0）よりも、下側への裾依存性が強いガンベルコピュラ（株価反転型、VaR : 44.4）やクレイトンコピュラ（金利反転型、VaR : 44.7）のリスク量の方が大きく、裾依存性の強さがリスク量を大き目に見積もる方向に作用している様子が窺える。

表 10 の中で正規コピュラ、混合正規コピュラ、 t コピュラの 3 つを比べると、本邦平時データを用いた表 8 の場合とは違い、正規コピュラ（VaR の分散効果率 : ▲18%）、 t コピュラ（同 : ▲18%）とも、混合正規コピュラ（同 : ▲15%）程度の分散効果に止まっている。

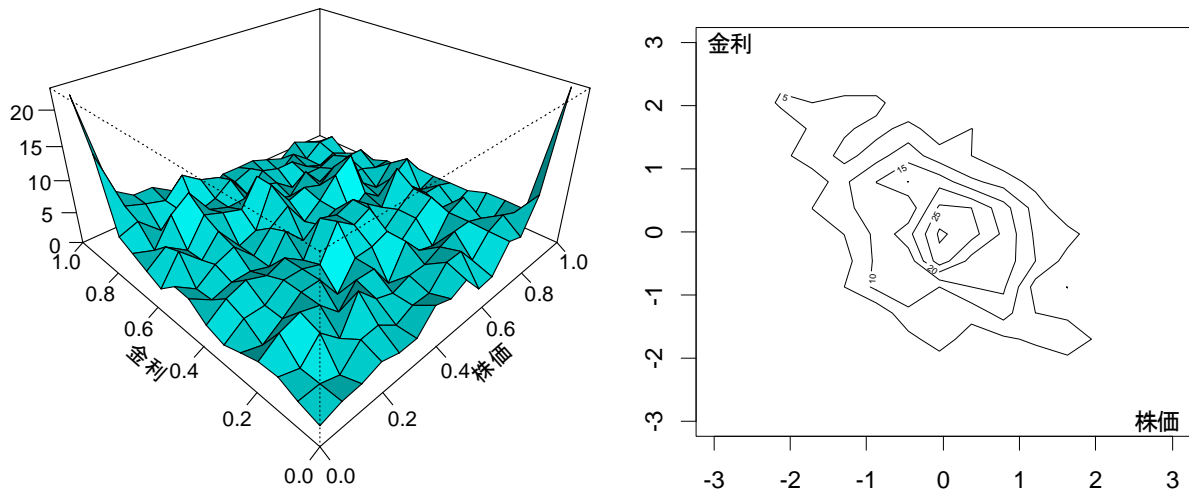
以上のことから、株価変動と金利変動が負の相関を持つ観測値が多いスペインデータを用いて相関構造を推定した場合には、コピュラの種類によらず分散効果は総じて小さく、リスク量が大き目に計測されることがわかる。

ロ. イタリアデータ

ここでは、近年の欧州債務危機問題のもう 1 つの事例として、イタリアの最近 3 年間（2009/10/1～2012/10/1 日）の変動（株価は対数前日差、金利は前日差）を用いて、スペインデータと同じ計測を行う。

まず、株価として FTSE MIB 指数を採用し、ノンパラメトリックなコピュラ のヒストグラムと各変量を標準正規分布とした場合の等高線を描くと、図 5 のようになる。

図 5 イタリアデータの疑似標本のヒストグラムと等高線



(注) 右図の等高線は周辺分布を標準正規分布として同時密度の等高線を描いたもの。

次に、パラメトリックなコピュラの最尤推定を行うと、 t コピュラの適合度が最も高い (BIC : -198.7) との結果が得られた (表 11)。

表 11 イタリアデータを用いたコピュラの最尤推定

| | パラメータ | 推定値 | 標準誤差 | BIC |
|-------------|----------|--------|-------|--------|
| ガンベル(金利反転) | γ | 1.400 | 0.039 | -176.7 |
| ガンベル(株価反転) | γ | 1.427 | 0.039 | -194.7 |
| クレイトン(金利反転) | α | 0.706 | 0.062 | -168.6 |
| クレイトン(株価反転) | α | 0.619 | 0.061 | -138.4 |
| フランク | δ | -2.928 | 0.234 | -149.9 |
| 正規 | ρ | -0.471 | 0.025 | -185.0 |
| t | ρ | -0.453 | 0.032 | -198.7 |
| | ν | 5.019 | 1.303 | |
| 混合正規 | ρ_1 | -0.588 | 0.042 | -186.5 |
| | ρ_2 | 0.421 | 0.241 | |
| | θ | 0.855 | 0.066 | |

そして、スペインデータでの分析と同様に、イタリアデータから求めたノンパラメトリック並びにパラメトリックなコピュラに本邦平時データから得られる周辺分布 (前掲表 1) を結合して、リスク量と分散効果率を計算する (表 12)。

表 12 イタリアデータを用いた各コピュラでの VaR と ES

| コピュラ | VaR(99%) | 標準 偏差 | 分散 効果率 | ES(97.5%) | 標準 偏差 | 分散 効果率 |
|-------------|----------|----------|-----------|-----------|----------|-----------|
| ノンパラメトリック | 38.2 | — | ▲25% | 39.1 | — | ▲30% |
| ガンベル(金利反転) | 39.7 | 0.40 | ▲22% | 42.8 | 0.49 | ▲23% |
| ガンベル(株価反転) | 45.3 | 0.59 | ▲11% | 49.9 | 0.70 | ▲11% |
| クレイトン(金利反転) | 45.7 | 0.57 | ▲10% | 50.3 | 0.72 | ▲10% |
| クレイトン(株価反転) | 37.1 | 0.38 | ▲27% | 40.2 | 0.46 | ▲28% |
| 正規 | 39.6 | 0.36 | ▲22% | 42.5 | 0.40 | ▲24% |
| フランク | 42.2 | 0.39 | ▲17% | 45.7 | 0.45 | ▲18% |
| t | 42.7 | 0.47 | ▲16% | 46.8 | 0.54 | ▲16% |
| 混合正規 | 44.2 | 0.44 | ▲13% | 47.9 | 0.59 | ▲14% |

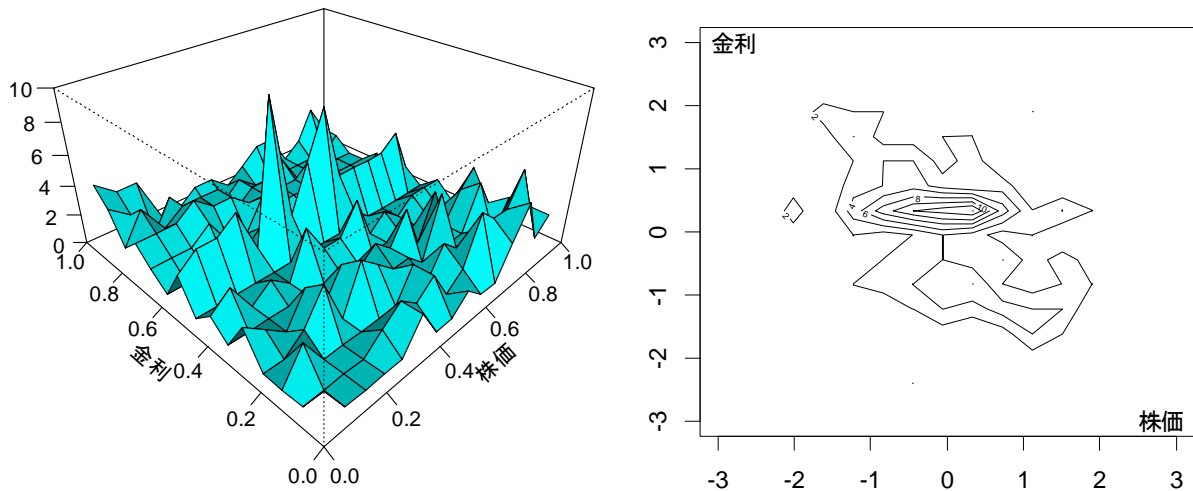
スペイン、イタリア両国のデータを用いた表 10 と表 12 の推計結果はほぼ同じであることがわかる。

ただし、仔細に見ると、両国データを用いた計測結果には 1 点違いがある。ノンパラメトリックなコピュラを用いた場合、VaR で観測される分散効果率（スペイン：▲21%、イタリア：▲25%）やリスク量（スペイン：45.0、イタリア：38.2）の差がやや大きいことである。ノンパラメトリックなコピュラを用いても、ES で観測される分散効果率（スペイン：▲30%、イタリア：▲30%）やリスク量（スペイン：39.2、イタリア：39.1）の差は小さい。これは、ノンパラメトリックなコピュラが観測データに影響されやすく、特に、1 点の損失でリスク量を把握する VaR では、観測データの特定のパターンに強く影響されやすいためと考えられる。一方、複数の損失を平均化してリスク量を把握する ES では、観測データの特定のパターンの影響は少ないと考えられる。しかし、表 10 の考察で述べたように、ノンパラメトリックなコピュラは ES の評価では過小評価になりやすい。このように、ノンパラメトリックなコピュラでは安定的な計測は難しいため、パラメトリックなコピュラを想定して分析することが望ましいと考えられる。

（４） 本邦 1990 年度データでの分析

以下では、本邦において、バブル末期に金利が上昇しつつも株価が下落した 1990 年度（1990/4/1～1991/3/31 日）に注目して、その変動（株価は対数前日差、金利は前日差）からノンパラメトリックなコピュラのヒストグラムと各変量を標準正規分布とした場合の等高線を描く（図 6）。

図 6 本邦 1990 年度データの疑似標本の散布図と等高線



(注) 右図の等高線は周辺分布を標準正規分布として同時密度の等高線を描いたもの。

これまでと同様に、パラメトリックなコピュラとして、ガンベル、クレイトン、フランク、正規、 t 、混合正規の各コピュラ（ただし、ガンベルとクレイトンは株価ないし金利を反転）についてパラメータ推定すると、 t コピュラの適合度が最も高い（BIC：-31.4）との結果が得られた（表 13）。

表 13 本邦 1990 年度データを用いたコピュラの最尤推定

| | パラメータ | 推定値 | 標準誤差 | BIC |
|-------------|----------|--------|-------|-------|
| ガンベル(金利反転) | γ | 1.285 | 0.063 | -24.1 |
| ガンベル(株価反転) | γ | 1.285 | 0.063 | -25.5 |
| クレイトン(金利反転) | α | 0.422 | 0.103 | -16.3 |
| クレイトン(株価反転) | α | 0.448 | 0.103 | -18.7 |
| フランク | δ | -2.489 | 0.419 | -30.1 |
| 正規 | ρ | -0.315 | 0.055 | -19.9 |
| t | ρ | -0.378 | 0.061 | -31.4 |
| | ν | 3.802 | 1.084 | |
| 混合正規 | ρ_1 | -0.707 | 0.067 | -29.6 |
| | ρ_2 | 0.237 | 0.177 | |
| | θ | 0.635 | 0.112 | |

本邦 1990 年度データから求めたノンパラメトリック並びにパラメトリックなコピュラを用いて、周辺分布に表 1 で得られた本邦の平時データから推定した分布を用いて仮想ポートフォリオのリスク量を計算する（表 14）。

表 14 本邦 1990 年度データを用いた各コピュラでの VaR と ES

| コピュラ | VaR(99%) | 標準 偏差 | 分散 効果率 | ES(97.5%) | 標準 偏差 | 分散 効果率 |
|-------------|----------|----------|-----------|-----------|----------|-----------|
| ノンパラメトリック | 33.7 | — | ▲34% | 35.7 | — | ▲36% |
| ガンベル(金利反転) | 38.5 | 0.34 | ▲24% | 41.6 | 0.43 | ▲26% |
| ガンベル(株価反転) | 43.3 | 0.43 | ▲15% | 47.7 | 0.57 | ▲15% |
| クレイトン(金利反転) | 42.9 | 0.49 | ▲16% | 47.2 | 0.62 | ▲16% |
| クレイトン(株価反転) | 36.6 | 0.37 | ▲28% | 39.6 | 0.47 | ▲29% |
| 正規 | 39.0 | 0.39 | ▲23% | 41.9 | 0.49 | ▲25% |
| フランク | 39.8 | 0.32 | ▲22% | 43.1 | 0.44 | ▲23% |
| t | 41.7 | 0.48 | ▲18% | 45.8 | 0.57 | ▲18% |
| 混合正規 | 45.8 | 0.46 | ▲10% | 49.8 | 0.59 | ▲11% |

本邦平時データの場合（前掲表 8）と比較すると、いずれのコピュラを用いてもスペイン（前掲表 10）やイタリア（前掲表 12）のデータと同様に、平時データでの対応するコピュラよりもリスク量は大きくなり、分散効果は小さくなっている。特に、最も適合度の高い t コピュラでは分散効果率が平時▲49%（前掲表 8）から▲18%と大幅に小さくなっている。平時に適合度の高かった混合正規コピュラでも分散効果率が平時▲19～17%から▲11～10%へと小さくなっており、他のコピュラと比較して小さ目の分散効果となっている。

本邦の 1990 年度のデータは、図 6 からわかるように負の相関での裾依存性が強いとはいえない形状をしており、スペインデータの形状（前掲図 4）、イタリアデータの形状（前掲図 5）とは大きく異なる。とはいえ、最も適合度の高い t コピュラを用いたリスク量はスペインやイタリアのデータセットの場合と大きくは変わらず、分散効果率は▲18～16%（スペイン：表 10、イタリア：表 12）に収まっている。

（5） データ分析から得られるインプリケーション

本節でのデータ分析の意義や結果の特徴点を整理する。

第 1 に、VaR 計測の基礎的手法として用いられることが多い VCV 法では、リスクファクターの周辺分布について正規分布というファットテイル性を捉えられない分布を仮定しているため、ポートフォリオのリスクを過小評価しやすい。VCV 法を利用する際には、リスクファクターの正規性検証を行い、もし正規性が棄却されるような場合には VCV 法以外の手法での計測や併用が求められる。

第 2 に、平時の相関構造とは異なる時期の相関構造として、最近のスペイン、

イタリアのデータや過去の本邦データを利用し、VaR や ES で示されるリスク量を算出すると、リスク量が大きくなり、分散効果率が小さくなる傾向が明らかとなった。このように、周辺分布の推定とコピュラの推定を別々のデータで推定することによって、近年観察されていない相関構造をストレス状況として勘案することができる。

第 3 に、ノンパラメトリックなコピュラに関しては、VaR についてはデータ依存性が高く安定的な計測が難しい点、ES については過小評価に繋がりやすい点に問題があるため、パラメトリックなコピュラを想定して分析することが望まれる。

第 4 に、パラメトリックなコピュラの中では、 t コピュラや混合正規コピュラの適合度が高かった。特に、株価と金利の変動に正の線形相関が観察される時期には、負の相関の要素を勘案できる混合正規コピュラの適合度が高く、リスク量が大きくなるという推計結果が得られた。ただし、情報量規準ではデータ数が多い場合に複数パラメータを用いたコピュラの適合度が高くなりやすい面があり、将来の相関構造を十分に表現しているとは限らない点には留意する必要がある。

第 5 に、実務においては、リスク量を保守的に見積もるために t コピュラのパラメータ ν を低く設定する場合があるが、これは必ずしもリスク量を大き目に見積もるとは限らない点には注意が必要である。

4. おわりに

本稿では、リスクファクターの相関構造に焦点を当てて、相関構造にどのようにストレス状況を織り込むべきかを議論した。本稿の分析を用いれば、周辺分布とコピュラの双方にストレスを与えたストレステストを行う際に、両者の寄与を別々に把握することが可能となる。

最後に、本稿で取り上げたコピュラの金融実務への適用可能性と本稿で取り上げなかった論点について述べる。

金融実務においては、本稿のように 2 変量のリスクファクターを設定し、ポートフォリオの合算リスクを把握することがある。例えば、債券単独のリスク量を算出する際には複数のグリッド金利をリスクファクターとするものの、債

券・株式の合算ポートフォリオのリスク量を把握する際には、債券については主要な金利、株式については株価インデックスで代表させて相関を求め、合算リスク量を把握することがある。また、全行的な経済資本の算出において、市場・信用・オペといったリスクカテゴリーごとに得られる損益分布を求めるリスクファクターとは別に、各リスクカテゴリーを代表させる損益時系列から相関構造を捉えることが多い (Brockman and Kalkbrener [2010]などを参照)。このとき市場損益と信用損益の2変量の時系列から正規や t のコピュラの相関パラメータ (t では自由度パラメータを含む) を決め、他のカテゴリー間の相関パラメータは時系列データの相関ではなく経験的に決める方法が用いられていることがある。こうしたリスク把握においては、本稿で示した手法をそのまま適用することが可能であろう。

次に、3変量以上のリスクファクターの場合には、本稿の分析を拡張させることで対応することができる。例えば、市場リスクについて、債券・株式に加え為替のリスク量を合算する場合や、さらに金利については期間別に複数のファクターで捉える場合である。また、経済資本把握でも、市場と信用との間の相関以外にも統計的な推測を行うことは十分に考えられる。こうした場合、本稿で取り上げたコピュラのうち、正規、 t 、混合正規の各コピュラは相関パラメータ ρ を相関行列 Ω に置き換えることで、リスクファクターの組合せによって異なる相関の推定が可能である。その際、相関行列を標本順位相関から推定するといった実務上の工夫もあり²⁸、さらに t コピュラでは裾依存度を表すパラメータ ν を先験的に与えたり、標本の裾依存性から推定するという工夫もある²⁹。また、1パラメータのアルキメディアンコピュラについては、1パラメータのまま3変量以上のコピュラに拡張することはできる。しかし、リスクファクターの組合せによって異なる相関を扱うには、2変量コピュラを繋ぎ合わせるヴァイン(vine)コピュラ³⁰、(1パラメータ)アルキメディアンコピュラを階層的に繋ぎ

²⁸ こうした工夫については、McNeil, Frey, and Embrechts [2005]を参照。混合正規コピュラについては、3変量以上あるいは3つ以上の相関行列を考慮する場合に、原理的にはEMアルゴリズムなどで最尤法を実現可能であるが、より簡便なパラメータ推定については、別途の工夫が必要である。

²⁹ 下側裾依存性に注目すると、十分小さな u に対し、任意の2変量 i と j の疑似標本のうち、2変量ともに u を下回る頻度は、既に決まっている相関パラメータ ρ_{ij} を用いた裾依存度 $2t_{\nu+1}(-\sqrt{(1-\rho_{ij})(\nu+1)/(1+\rho_{ij})})$ に近づくと考えられることから、その等号関係がなるべく成り立つように ν を定めることが考えられる。

³⁰ ヴァインコピュラについては、Kurowicka and Joe [2010]のハンドブックがあるほか、野澤

合わせる階層的アルキメディアンコピュラ (hierarchical Archimedean copula, HAC)³¹といった工夫が必要になる³²。また、裾依存性が対称な t コピュラに非対称性を加えるスキュー t コピュラも考えられる³³。ヴァイン、階層的アルキメディアン、スキュー t といったコピュラは、学界でも研究段階にあり、実務的な応用は今後の課題である。

本稿では、各時点のリスクファクターが同一の分布に従うと考える「無条件アプローチ (unconditional approach)」に基づいて分析を行った。これは、金融機関のリスク管理実務においては、先行きの資本評価期間 (1年間など) のうち任意の 1 日間の市場変動に対して必要な資本を見積もるという考え方から無条件アプローチの考え方を採用していることが多いと思われるためである。これに対して、学界では、評価時点で利用可能な情報をすべて利用し、将来のリスクファクターの予測可能な部分は GARCH 等でフィルタリングしながら推計する「条件付きアプローチ (conditional approach)」に基づく研究も進んでいる³⁴。条件付きアプローチでは、予測できない部分についてコピュラを適用する研究も進展している。ボラティリティ変動を捉えることなどによりリスクファクターの分布が変化していくことを精緻に捉えられれば、局所的な相関構造に複雑なコピュラを用いる必要性がなくなる可能性もある。こうした研究の金融実務への応用も今後の課題である。

本稿で取り上げなかった大きな論点として、リスク計測期間の調整がある。リスクファクターの時系列的な相関の存在も問題ではあるが、仮に時系列的な独立性が満たされるとする。本稿で考察したパラメトリックなコピュラにスキュー t 分布に従う周辺分布を組み合わせたリスクファクターの同時分布からポートフォリオの損益分布の分散を求めると通常は有限の値になると考えられる。

[2010]で簡単な解説がなされている。

³¹ HAC については、Savu and Trede [2010]などを参照。

³² ヴァインコピュラでは、変数数が多くなった場合に考察すべき 2 変量の組合せが巨大になるため、実用できる変数数は 10~20 程度に止まる。一方、HAC については、例えば与信ポートフォリオのリスク管理では業種内は 1 パラメータのコピュラで相関構造を表現し得る (1 パラメータでしか捉えられない) 可能性があり、その場合には数百社のリスク計測も比較的容易に行える。

³³ Demarta and McNeil [2005]や Smith, Gan, and Kohn [2012]などでは、様々なスキュー t コピュラが提案されている。

³⁴ 例えば、中村・横内 [2010]、渡部・佐々木 [2006]、Christoffersen *et al.* [2012]、Smith, Gan, and Kohn [2012]など学界では条件付きアプローチで分析を進めるのが一般的である。無条件アプローチと条件付きアプローチの違いについては、磯貝 [2013]も参照。

したがって、ポートフォリオ不変の設定では、独立に 1 期間のポートフォリオ損益分布に従う確率変数の和の分布を求めれば、終期でのポートフォリオ損益分布が求められることになり、それは期間が長ければ正規分布に近づくと考えられる。ただし、分散が有限であっても 1 期間のポートフォリオ損益分布が相応にファットテイルである場合には、終期でのポートフォリオ損益分布の裾の正規分布への収束は遅いことが知られている (Fushiya and Kusuoka [2010])。さらに、実務的には、ポートフォリオに含まれる商品の流動性に応じてポートフォリオ不変の設定を変更していくことで実態に即したリスク計測となる (例えば Brockman and Kalkbrener [2010])。リスク計測期間の調整を巡る論点は様々であり、今後検討を進めなければならない点が多い。

いずれしてもリスク量計測において、リスクファクターの分布が変化していくことが考慮されていない場合には、単一の線形相関 (正規コピュラ) では合算リスク量を過小評価する可能性があるため、ストレス状況でも耐えるリスク量を見積もることができるコピュラを精緻に検討することが望まれる。この点は、本稿で扱った市場リスクだけでなく、全行的な経済資本を見積もる際にも望まれる点である。

以上

補論 1.2 変量コピュラの構成

本補論では、コピュラの構成方法について、ノンパラメトリックなコピュラとパラメトリックなコピュラに分けて述べる。

まず、ノンパラメトリック並びにパラメトリックなコピュラに共通して、コピュラの推定に当たって、観測データの周辺分布による変換が必要になる。例えば、本邦の最近 5 年間のデータを利用した例では、日次のリターン $N=1,227$ 個のデータが観測データとして得られている。株価収益率のデータは x_{11}, \dots, x_{1N} 、金利変化幅のデータは x_{21}, \dots, x_{2N} と得られたとする。本文表 1 で株価・金利それぞれについて推定したスキュー t 分布の分布関数を用いて、リターンデータを累積確率に変換すると、株価収益率のデータは u_{11}, \dots, u_{1N} 、金利変化幅のデータは u_{21}, \dots, u_{2N} という疑似標本 (pseudo sample) に変換される。この同時分布関数を推定することでコピュラの推定関数が得られる³⁵。

ノンパラメトリックなコピュラを構成するには、 $[0,1] \times [0,1]$ 上の平面で観測された変換データ $(u_{11}, u_{21}), \dots, (u_{1N}, u_{2N})$ の存在する点に $1/N$ の確率を付与し、 $[0,1] \times [0,1]$ 上の各点 (u_1, u_2) について、それら以下の確率を集計すればよい。コピュラは同時の累積分布として定義されるため、各点 (u_1, u_2) 以下の確率を集計することになるが、各点に付与された確率をそのままヒストグラムにすれば、ノンパラメトリックなコピュラ $C_E(u_1, u_2)$ の密度関数表現 $c_E(u_1, u_2)$ が得られる。本邦の最近 5 年間のデータを利用した例では、本文図 3 の左図のようになる。

一方、本文中で用いられている 2 変量のパラメトリックなコピュラは以下の (A-1)~(A-5)、(A-9)式のように与えられる。これらのコピュラの推定に際しては、コピュラ関数を本文(4)式のように各変量で偏微分して密度関数を求め、それから対数尤度を構成し、変換データ $(u_{11}, u_{21}), \dots, (u_{1N}, u_{2N})$ で最も対数尤度が高くなるパラメータを探すという手続きになる。

ガンベル、クレイトン、フランク、正規、 t の各コピュラは、以下の式で表現される。

$$\text{ガンベル : } C_G(u_1, u_2) = \exp\{-((-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma)^{1/\gamma}\} \quad (\text{A-1})$$

$$\text{クレイトン : } C_C(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha} \quad (\text{A-2})$$

³⁵ ノンパラメトリックなコピュラで代表的な経験コピュラ (empirical copula) は、周辺分布を経験分布として定義されるコピュラであり (塚原 [2008]などを参照)、周辺分布をスキュー t 分布として疑似標本から導出した本稿でのノンパラメトリックなコピュラとは異なる。

$$\text{フランク : } C_F(u_1, u_2) = -\frac{1}{\delta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\delta u_1} - 1)(e^{-\delta u_2} - 1)}{(e^{-\delta} - 1)} \right) \quad (\text{A-3})$$

$$\text{正規 : } C_N(u_1, u_2) = \Phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2) | \rho) \quad (\text{A-4})$$

$$t : C_t(u_1, u_2) = \mathbf{t}_v(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2) | \rho) \quad (\text{A-5})$$

混合正規コピュラは、2つの正規分布が混合した混合正規分布を基にしたコピュラである。基となる混合正規分布では、1つ目の状態の相関は ρ_1 、2つ目の相関は ρ_2 の2つの多変量正規分布が混合比率 $\theta : 1-\theta$ で出現する。2変量の混合正規分布の分布関数（累積密度関数）は、

$$\Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \theta \Phi(x_1, x_2 | \rho_1) + (1-\theta) \Phi(x_1, x_2 | \rho_2) \quad (\text{A-6})$$

と表される。平均0、分散1で相関 ρ_1 の2変量正規分布に従う確率変数を Y 、相関 ρ_2 の2変量正規分布に従う確率変数を Z 、 $[0,1]$ の一様分布に従う確率変数を U とすると、 $X = (X_1, X_2)^T$ という2変量ベクトルの確率変数は

$$X = 1_{\{U < \theta\}} Y + (1 - 1_{\{U < \theta\}}) Z \quad (\text{A-7})$$

と表現される。周辺分布は、1変量標準正規分布関数を $\Phi(\cdot)$ として

$$\Pr(X_j \leq x_j) = \theta \Phi(x_j) + (1-\theta) \Phi(x_j) = \Phi(x_j), \quad j=1,2 \quad (\text{A-8})$$

となるから、2変量の混合正規コピュラは、

$$C_{MN}(u_1, u_2) = \theta \Phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2) | \rho_1) + (1-\theta) \Phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2) | \rho_2) \quad (\text{A-9})$$

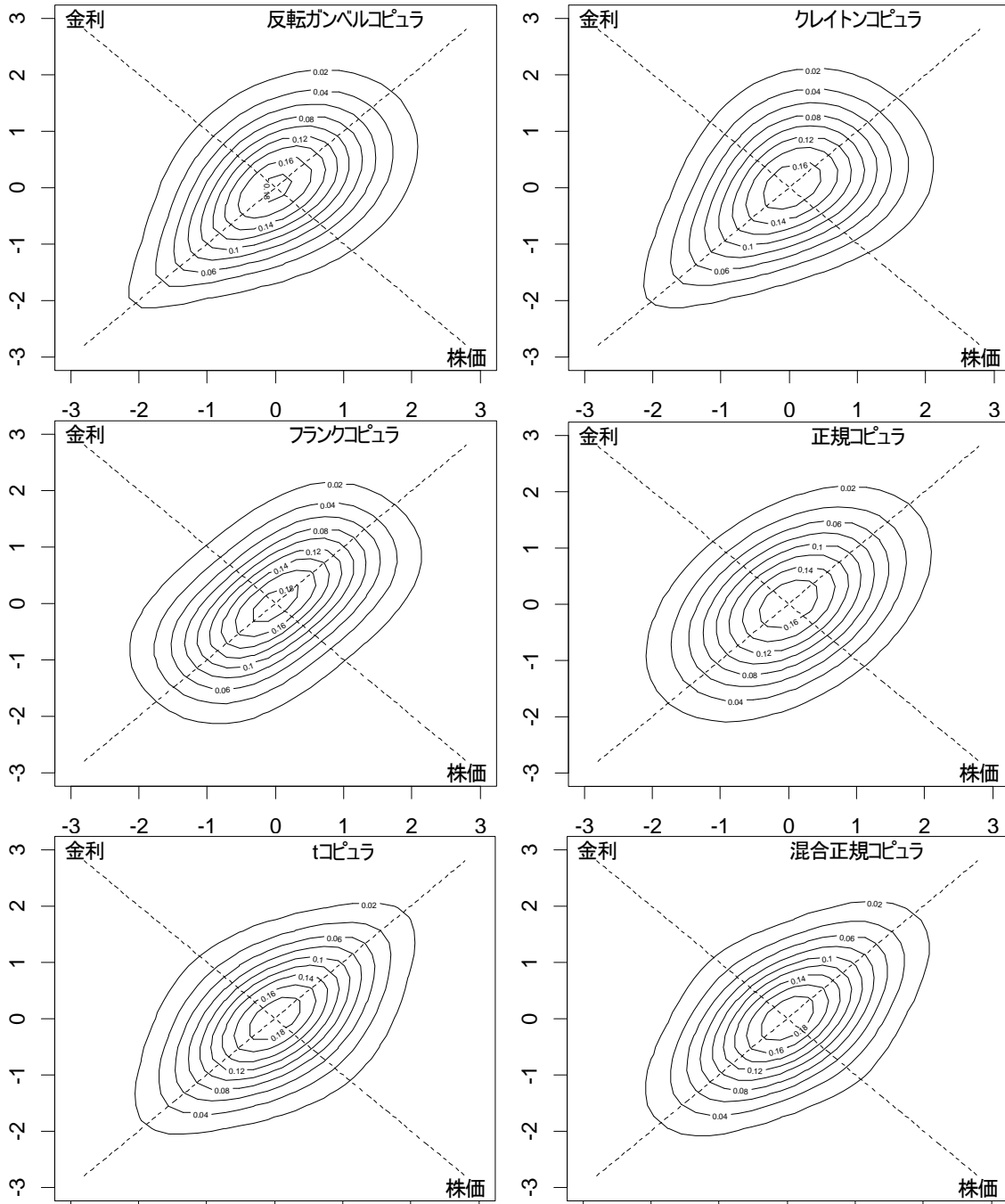
と定義できる。

本文表7の推定値を用いて、各変量を標準正規分布としてそれぞれのコピュラを適用した場合の同時密度関数の等高線を描くと、図A-1のようになる。

図A-1では右上がり及び右下がりの45度線を点線で付記している。混合正規コピュラの $\rho_1 (<0)$ のパラメータは-1に近づくほど右上がりの45度線の方に等高線を引っ張る効果がある。一方、 $\rho_2 (>0)$ のパラメータは1に近づくほど右下がりの45度線の方に等高線を引っ張る効果がある。これらが混合比率 $\theta : 1-\theta$ で組み合わされていることが図A-1の右図からも読み取れる。図A-1の左図の t コピュラの等高線の形状も混合正規コピュラと同じように右上がり及び右下がりの45度線の方に引っ張られる形をしており、楕円の形はしていない（正規コピュラであれば楕円の形になる）。 t コピュラでは引っ張り度合いは裾依存性を表していることになるため、パラメータ v が低い値であるほど引っ張り

度合いが大きくなる。

図 A-1 本邦平時データのコピュラの等高線



(注) 各等高線は周辺分布を標準正規分布として同時密度の等高線を描いたもの。

補論 2. コピュラ推定の際の周辺分布

本補論では、株価と金利変動に負の線形相関が観察されるデータについて、その単独の分布（周辺分布）の推定結果を 99%点も加えて示す。周辺分布はスチュードント分布を仮定しており、その最尤パラメータ推定量を示す。コピュラを推定する際には、株価収益率、金利変化幅のデータを、これらの推定値によるスチュードント分布の分布関数で変換し、[0,1]の累積確率に対応する疑似標本に直してコピュラの推定を行っている。

表 A-1 スペインデータでの推定パラメータと 99%点

| | 位置(μ) | 尺度(σ) | 形状(λ) | 自由度(ν) | 99%点 |
|----|-------------|----------------|-----------------|--------------|----------|
| 株価 | -0.000078 | 0.013825 | -0.040 | 4.792 | -0.04829 |
| 金利 | 0.011546 | 0.069188 | -0.076 | 2.307 | 0.39611 |

表 A-2 イタリアデータでの推定パラメータと 99%点

| | 位置(μ) | 尺度(σ) | 形状(λ) | 自由度(ν) | 99%点 |
|----|-------------|----------------|-----------------|--------------|----------|
| 株価 | 0.005011 | 0.014978 | -0.428 | 4.747 | -0.05368 |
| 金利 | 0.003873 | 0.052903 | -0.009 | 1.717 | 0.46437 |

表 A-3 本邦 1990 年度データでの推定パラメータと 99%点

| | 位置(μ) | 尺度(σ) | 形状(λ) | 自由度(ν) | 99%点 |
|----|-------------|----------------|-----------------|--------------|----------|
| 株価 | -0.001318 | 0.014526 | 0.045 | 3.963 | -0.05481 |
| 金利 | -0.000070 | 0.000255 | 0.118 | 1.583 | 0.00273 |

参考文献

- 磯貝 孝、「切断安定分布による資産収益率のファットテイル性のモデル化と VaR・ES の計測手法におけるモデル・リスクの数値的分析」、日本銀行ワーキングペーパーシリーズ No.13-J-3、2013 年
- 菅 和聖・福田 善之・杉原 慶彦・西岡 慎一、「わが国銀行の株式保有と貸出・債券との連関リスク」、日銀レビュー 2012-J-6、2012 年
- 菅 和聖・福田 善之・杉原 慶彦、「債券と株式の相関関係を考慮した場合の銀行の株式保有について — ポートフォリオ理論にもとづくアプローチ —」、日本銀行ワーキングペーパーシリーズ No.13-J-1、2013 年
- 久保田 幸長、「市場 VaR 計測の問題点とパラメトリック法による改善」、日本銀行金融研究所 IMES Discussion Paper Series No. 2009-J-27、2009 年
- 新谷 幸平・山田 哲也・吉羽 要直、「金融危機時における資産価格変動の相互依存関係：コンピュータに基づく評価」、『金融研究』、第 29 巻第 3 号、2010 年、89～122 頁
- 塚原 英敦、「接合分布関数 (コンピュータ) の理論と応用」、『21 世紀の統計科学Ⅲ 数理・計算の統計科学』、第 5 章、2008 年、111～146 頁
- 戸坂 凡展・吉羽 要直、「コンピュータの金融実務での具体的な活用方法の解説」、『金融研究』、第 24 巻別冊第 2 号、2005 年、115～162 頁
- 中村 信弘・横内 大介、「多変量動的コンピュータ関数を用いたアセットアロケーション」、『JAFEE2010 夏季大会予稿集』、2010 年、347～358 頁
- 野澤 勇樹、「金融市場混乱期における日本のクレジット・スプレッドの変動と依存構造 — 多変量コンピュータによる推定とその応用 —」、『JAFEE2010 夏季大会予稿集』、2010 年、323～334 頁
- 渡部 敏明・佐々木 浩二、「ARCH 型モデルと“Realized Volatility”によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク」、『金融研究』、第 25 巻別冊第 2 号、2006 年、39～74 頁
- Aas, Kjersti and Ingrid Hobaek Haff, “The Generalized Hyperbolic Skew Student’s t -Distribution,” *Journal of Financial Econometrics*, **4**(2), 2006, pp.275–309.
- Azzalini, Adelchi and Antonella Capitanio, “Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t -distribution,” *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **65**(2), 2003, pp.367–389.
- Basel Committee on Banking Supervision, Joint Forum “Developments in Modelling Risk Aggregation,” 21 October 2010.
- Brockmann, Michael and Michael Kalkbrener, “On the aggregation of risk,” *Journal of*

- Risk*, **12**(3), 2010, pp.45–68.
- Christoffersen, Peter, Vihang Errunza, Kris Jacobs, and Hugues Langlois, “Is the Potential for International Diversification Disappearing? A Dynamic Copula Approach,” *Review of Financial Studies*, **25**(12), 2012, pp.3711–3751.
- Daniélsson, Jón, Bjørn N. Jorgensen, Gennady Samorodnitsky, Mandira Sarma, and Casper G. de Vries, “Fat Tails, VaR and Subadditivity,” *Journal of Econometrics*, **172**(2), 2013, pp.283–291..
- Demarta, Stefano and Alexander J. McNeil, “The t Copula and Related Copulas,” *International Statistical Review*, **73**(1), 2005, pp.111–129.
- Fernández, Carmen and Mark F. J. Steel, “On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness,” *Journal of the American Statistical Association*, **93**(441), 1998, pp.359–371.
- Fushiya, Hirotaka and Shigeo Kusuoka, “Uniform Estimate for Distributions of the Sum of i.i.d. Random Variables with Fat Tail,” *Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo*, **17**(1), 2010, pp.79–121.
- Hansen, Bruce, “Autoregressive conditional density estimation,” *International Economic Review*, **35**(3), 1994, pp.705–729.
- Joe, Harry, *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, 1997.
- Kojadinovic, Ivan, Jun Yan, and Mark Holmes, “Fast large-sample goodness-of-fit tests for copulas,” *Statistica Sinica*, **21**, 2011, pp.841–871.
- Kurowicka, Dorota and Harry Joe, *Dependence Modeling: Vine Copula Handbook*, World Scientific Publishing, 2010.
- McNeil, Alexander J., Rüdiger Frey, and Paul Embrechts, *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, Princeton University Press, 2005.
(『定量的リスク管理—基礎概念と数理技法—』、塚原英敦ら訳、共立出版、2008年)
- Meucci, Attilio, “A New Breed of Copulas for Risk and Portfolio Management,” *Risk*, **24**(9), 2011a, pp.110–114.
- Meucci, Attilio, “A Short, Comprehensive, Practical Guide to Copulas,” *GARP Risk Professional: The Quant Classroom by Attilio Meucci*, 2011b, pp.54–59.
- Miura, Ryoza and Shingo Oue, “Statistical Methodologies for the Market Risk Measurement,” *Asia-Pacific Financial Markets*, **7**(4), 2000, pp.305–319.
- Nelsen, Roger B., *An Introduction to Copulas*, 2nd edition, Springer, 2006.
- Savu, Cornelia and Mark Tiede, “Hierarchies of Archimedean copulas,” *Quantitative*

Finance, **10**(3), 2010, pp.295–304

Smith, Michael S., Quan Gan, and Robert J. Kohn, “Modelling dependence using skew t copulas: Bayesian inference and applications,” *Journal of Applied Econometrics*, **27**(3), 2012, pp.500–522.