



BOJ *Reports & Research Papers*

2007年6月

リスク管理と金融機関経営に関する調査論文

損失額分布やパラメータ推定手法の選択が
オペレーショナルリスク計量結果に与える影響について
～サンプルデータを用いた分析～

日本銀行金融機構局

本稿の内容について、商用目的で転載・複製を行う場合は、予め日本銀行金融機構局までご相談ください。

転載・複製を行う場合は、出所を明記してください。

目次

1. はじめに	1
2. 先行研究事例	2
3. 損失分布手法の概要	4
(1) 損失分布手法の枠組み	4
(2) 損失額分布の推定手法（パラメトリック手法とノンパラメトリック手法）	6
(3) ベンチマークとしてのノンパラメトリック手法	7
4. データ	7
5. 計量結果とその分析	10
(1) 損失額分布に「単一の分布」を仮定する方法	10
(2) 損失額分布に「合成分布」を仮定する方法	17
6. まとめ	30
【補論1】「リスク計量における信頼区間」と「リスク量に影響を与える損失データの範囲」の関係について	32
【補論2】本稿で用いられる技術的な用語、論点について	42
参考文献	46

損失額分布やパラメータ推定手法の選択が オペレーショナルリスク計量結果に与える影響について サンプルデータを用いた分析

森淳稔*、木全友則**、長藤剛***

(要旨)

内外の金融機関では、オペレーショナルリスク計量化手法として、損失分布手法を利用する先が多い。もっとも、その際用いられるモデルの内容、特に損失額分布の分布形の仮定や、分布形のパラメータ推定手法は様々であり、未だ実務標準となるような手法は確立されていない。

本稿では、「わが国金融機関のオペレーショナルリスク損失データから抽出し、加工したオペレーショナルリスクに関するサンプルデータ」を用いて、損失額分布の「分布形の仮定」および「パラメータ推定手法の選択」がリスク量の計量結果に与える影響について分析した。分析に用いたサンプルデータは、一般に損失額分布として用いられることが多い対数正規分布に従うデータよりも「ファットテール性が強い」という特徴を有するものである。分析の結果、こうした特徴を有するサンプルデータに対して、「一般に最適」とまでいえるような、分布形、パラメータ推定手法を見出すことはできなかったが、計量結果を比較することによって、損失額分布を低額損失部分と高額損失部分に分けて推定すること、また、適切なパラメータ推定手法を選択することで、比較的妥当なリスク量が算出されることが確認できた。

本稿は、こうしたオペレーショナルリスク特性を有するサンプルデータを用いたオペレーショナルリスクの計量化を通じて、損失額分布の推定からリスク量の算出および評価に至るオペレーショナルリスク計量化の一連のプロセスを紹介するものである。

* 日本銀行 金融機構局、E-mail : atsutoshi.mori@boj.or.jp

** 日本銀行 金融機構局、E-mail : tomonori.kimata@boj.or.jp

*** 日本銀行 金融機構局、E-mail : tsuyoshi.nagafuji@boj.or.jp

本稿の作成に当たっては、中川秀敏氏（東京工業大学）から有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。

本稿は、日本銀行金融機構局が取り組んでいる施策について、課題や論点等を提示する目的で作成したものである。関係者から幅広くご意見を頂くため、中間的な成果を取りまとめたものであり、必ずしも日本銀行金融機構局の確定した見解や対応方針を示すものではない。

1. はじめに

内外の金融機関においては、オペレーショナルリスク¹(以下「オペリスク」)を計量²し、その結果を金融機関のオペリスク特性³の理解や、オペリスクに係る損失の発生に備えるために必要な資本量の把握等を通じて、自らのオペリスク管理に活用する動きが進んでいる。

もともと、オペリスクの計量を通じたオペリスク管理を行うにあたり、金融機関が、以下のような問題に直面して対応に苦慮する事例が少なからず見受けられる。

①オペリスク計量化のために、実務の現場で用いられる標準的な手法がいまだ殆ど確立されていないことによる問題がある⁴。例えば、用いる計量化手法により算出されるリスク量が大きく異なれば、リスク計量結果を客観的な基準としてリスク資本配賦や日々の経営管理に活用することが難しくなる。このため、少なくとも、幾つかの代表的な計量化手法の特徴や、各々の手法によって算出されるリスク量の差異について、認識を共有する必要があると考えられる。

②個別の金融機関がオペリスク計量化を試みる場合に、一般に当該金融機関の内部に蓄積された実損データのみでは、統計的に意味のある計量結果を算出するのに十分なデータ数に達していない場合が多いという問題がある。この点、わが国の金融機関においては、オペリスクに起因した損失事例のデータ蓄積が遅れている場合が多いことに加え、これを補うのに適当なオペリスクの外部データベースが存在しないことも問題となる。

本稿は、わが国金融機関から収集して作成したオペリスク損失データ⁵に対して、現在金融機関の間で利用実績のある様々なリスク計量化手法を用いてオペリスクを計量し、各々の手法の特徴や長所、短所を、実際の損失データ

¹ 本稿で用いる「オペリスク」の定義は、「内部プロセス・人・システムが不適切であること、もしくは機能しないこと、又は外生的事象に起因する損失に係るリスク」とし、法務リスク（金融機関が起訴され、訴訟費用や賠償金支払いが発生するリスク）は含み、戦略リスク（誤った経営戦略の策定・実行により損失を被るリスク）、および風評リスク（風説の流布等により、金融機関の信用が低下することにより損失を被るリスク）は含んでいない。

² 定量的にリスクを計測すること。

³ オペレーショナルリスク管理高度化勉強会[2006]を参照。

⁴ オペレーショナルリスク管理高度化勉強会[2006]を参照。

⁵ オペリスクが顕現化したことに伴い、金融機関が損失を被った事例における、損失額や損失発生時点のデータ。

(実損データ)への適合性、および計量されたリスク量の妥当性という観点から比較分析を試みたものである。本稿の分析は、こうしたオペリスク計量化の一連のプロセスを紹介したものであり、金融機関によるオペリスク計量化と、これを用いたオペリスク管理の一層の高度化に向けた取組みへの一助となることを企図している。

本稿を読む上では、分析対象としたサンプルデータ、計量化手法の両面で幾つかの留意点が存在する。まず、①本稿で用いたサンプルデータには、オペリスクを計量する上で避けることのできない、「発生頻度の低い高額損失(低頻度高額損失)データを十分に蓄積した形にはなっていない可能性がある」という制約⁶がある。また、②本稿では、主として、内外金融機関において既に広く利用が試みられた実績のある計量化手法(損失分布手法⁷)を用いて分析を行ったが、これら以外に優れた手法が存在する可能性は否定できない。また、オペリスク計量化手法は、現段階ではなお発展途上の技術であり、近い将来、新たに優れた手法が開発される可能性もある。さらに、③本稿で望ましいとされた手法も、オペリスク特性が異なるデータに対しては必ずしも適切なものとはならない可能性もある。

本稿の構成は以下の通りである。まず第2節では、オペリスク計量化に関する先行研究事例を紹介する。次に第3節で、具体的にリスク計量化の枠組みを整理する。さらに、第4節で、本稿で用いたサンプルデータの特徴を示す。その上で、第5節において、様々な手法で損失額分布を推定し、それらを用いてリスク量を算出した結果を相互に比較し評価する。最後に、第6節で以上の過程を振り返りつつ、オペリスク計量に関する実務に即した考察や、残された課題をまとめる。

また、本論の理解を深める上で参考となる関連事項は、補論として後述する。【補論1】では、「リスク計量における信頼区間」と「リスク量に影響を与える損失データの範囲」の関係について説明し、【補論2】では、技術的な用語、論点について説明する。

2. 先行研究事例

損失データを用いたオペリスク計量化に関する実証分析は、これまでも数多く報告されている。筆者が知る限り、国内の分析事例で公表されているものは、三菱信託銀行オペレーショナル・リスク研究会[2002]があるのみである

⁶ 本稿で用いたデータの特徴については4節で後述する。

⁷ 損失分布手法の概要については3節で後述する。

が、海外においては、de Fontnouvelle *et al.* [2003]、de Fontnouvelle *et al.* [2004]、Chapelle *et al.* [2004]、Moscadelli [2004]、Dutta and Perry [2006] 等多くの報告事例がある。これらの論文の内容は、計量対象データ、計量化手法の観点から以下のように整理できる。

①計量対象としたデータ

de Fontnouvelle *et al.* [2003]が市販されている損失データを用いているほかは、いずれも、単独または複数金融機関から内部損失データ（当該金融機関内部で発生した損失データ）を収集し、損失データとして用いている。

de Fontnouvelle *et al.* [2003]以外の事例のうち、三菱信託銀行オペレーション・リスク研究会[2002]と Chapelle *et al.* [2004]が単独の金融機関、その他の3事例（Moscadelli[2004]、de Fontnouvelle *et al.* [2004]、Dutta and Perry [2006]）は、複数（6行～89行）の金融機関から収集した損失データを用いている。

複数の金融機関の内部損失データを用いている事例のうち、de Fontnouvelle *et al.* [2004]、Dutta and Perry [2006]は個別金融機関毎にリスクを計量しているのに対して、Moscadelli[2004]は全金融機関のデータを統合したものについてリスクを計量している。

いずれの事例についても、損失データをイベントタイプないしビジネスライン⁸、もしくはその双方を基準に、複数の計量単位に分けた上で、各々の計量単位毎にオペリスクを計量している。

②計量化に用いた手法

いずれもリスク計量化手法として損失分布手法を用いているが、その際仮定する損失額分布の分布形により、計量結果が大きく異なることを示している。また、いずれも損失額分布の裾が厚くなる傾向が強いといわれるオペリスク損失データの特性を考慮して、リスク計量化手法のモデル化にあたり「極値理論（POT手法⁹）」を応用し、その結果を利用している。 de Fontnouvelle

⁸ イベントタイプとは、損失データを発生要因別（内部不正、システム障害等）に7種類に分けた類型を表す。ビジネスラインとは、損失データを発生部門（コーポレート・ファイナンス、リテール・バンキング等）別に8種類に分けた類型を表す。いずれもバーゼルIIにおけるオペリスク所要自己資本額算出において設定された損失データの分類の枠組みである。

⁹ 極値理論とは、「特に大きな値のデータが従う分布（極値分布）」を扱う理論である。POT手法は、「閾値を十分大きくとれば、閾値からの超過金額の分布が一般化パレート分布で近

et al. [2004]、Chapelle *et al.* [2004]、Moscadelli [2004]が、極値理論 (POT 手法) の利用に対して肯定的な評価を与える一方で、Dutta and Perry [2006] は、極値理論 (POT手法) の利用に対しては、他の手法に比べて突出して大きなリスク量が算出される場合があること、閾値の設定によりリスク量が大きく振れること等の理由から否定的な評価を与え、4つのパラメータを持つ、より自由度が高い分布¹⁰の活用を提唱している。

損失額分布のパラメータ推定手法に関して、三菱信託銀行オペレーショナル・リスク研究会[2002]は推定手法の違いによってリスク量が大きく異なることを示している。一方、その他の事例では、パラメータ推定手法の違いによるリスク量の比較、評価は行わず、1つの手法 (主として最尤法) のみを選択している。

本稿においては、サンプルデータに対し、まず、(1)損失額分布全体に「単一の分布」を仮定する方法によるリスク計量化を試みる。次に、(2)損失額分布に「合成分布 (金額に境界値<閾値>を設け、その前後で異なる2つの分布を推定、これらを1つにまとめた分布) <後述>」を仮定する方法によるリスク計量化を試みる。(2)では、低頻度高額損失部分に国内外の先行研究事例において使用されている極値理論 (POT 手法) の考え方を取り入れる。

3. 損失分布手法の概要

まず、本稿の分析で用いる損失分布手法の枠組みを紹介し、次いで、本稿で分析に用いた損失分布手法 (パラメトリック手法) と、パラメトリック手法によるリスク計量結果を評価する際の基準 (ベンチマーク) として採用したノンパラメトリック手法をそれぞれ説明する。最後に、本稿でノンパラメトリック手法をベンチマークとして用いた背景と留意点について述べる。

(1) 損失分布手法の枠組み

本稿ではオペリスク量を、VaR (Value at Risk) の形で¹¹、すなわち、信頼区間 $100\alpha\%$ のリスク量を、「リスク計測期間内に発生する全ての損失事象

似できる」という定理 (Pickands-Balkema-de Haanの定理) に基づき、極値分布を推定する手法である。オペリスクの計量化にPOT手法を用いる場合、損失データに適切な閾値を設け、閾値を超えるデータ (すなわちテール部分) の超過損失額が一般化パレート分布に従うと仮定する。詳細は森本[2000]を参照。

¹⁰ Hoaglin, Mosteller, and Tukey[1985]でg-h分布として紹介されている。

¹¹ 本稿では、オペリスク量を測る指標として実務で最も一般的に用いられているVaRを用いる。

の損失額の総和（総損失額）の確率分布の $100\alpha\%$ 点」として定義する。

総損失額の分布は、損失頻度分布（リスク計測期間内に発生する損失回数
の確率分布）と、損失額分布（損失が発生した場合の1件当たりの損失額の
確率分布）の組合せとして推定する。具体的には、リスク計測期間を1年、
信頼区間を99%、および99.9%とし、モンテカルロ・シミュレーション（以
下「シミュレーション」）を用いて算出された総損失額分布から、信頼区間に
相当するリスク量を推定する¹²。

具体的には、以下の手順でリスク量を推定する。

① 損失頻度分布の推定

リスク計測期間（1年間）内に発生する損失件数 N が従う分布（損失頻
度分布）の分布形を推定する。本稿では、 N はポアソン分布に従うと仮定
し、そのパラメータは、年間平均損失発生件数により推定する¹³。

② 損失額分布の推定

損失が発生した場合の1件当たりの損失額 $X_i, (i=1,2,\dots,N)$ が従う分布
（損失額分布）の分布形を推定する。損失額分布の推定手法は、大きく、
(i) 損失額分布に特定の分布形（対数正規分布、ワイブル分布等）を仮定
する手法（パラメトリック手法）と、(ii) 特定の分布形を仮定しない手法
（ノンパラメトリック手法）に分類される。ここで、各損失額 X_i は、互い
に独立で同一の分布から生成され、損失発生件数 N と損失額 X_i は独立であ
ると仮定する。

③ 総損失額の計算

①で推定した損失頻度分布に従って、年間損失発生件数 N を抽出し、②

¹² シミュレーションを用いない総損失額分布の計算方法として、他にパンニャ（Panjer）
の漸化式を用いる方法、高速フーリエ変換法が知られている。詳細は、Klugman, Panjer,
and Willmot [2004]を参照。

¹³ ポアソン分布の確率密度関数は $f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ で与えられる。なお、期待値は λ であり、
これを年間平均損失発生件数と一致させることで λ を推定する。

で推定した損失額分布から N 件分の損失額 (X_1, X_2, \dots, X_N) を抽出し、リスク計測期間（1 年間）内の総損失額 S を計算する。

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

④ シミュレーション（ K 回試行）による VaR の計算

③を K 回繰り返し、 K 個の総損失額 $S_{(1)}, S_{(2)}, \dots, S_{(K)}$ を計算し、これらを総損失額の小さい順に S_i ($S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_K$) とする。このとき、以下のようにリスク量を定義する。

$$\begin{aligned} \text{VaR}(\alpha) &= S_i, \quad \frac{i-1}{K} \leq \alpha < \frac{i}{K}, \quad i=1, 2, \dots, K \\ &= S_{[\alpha K + 1]}, \quad \text{ただし、}[x] \text{ は } x \text{ を超えない最大の整数を表す。} \end{aligned}$$

例えば、 $K=100,000$ 回、 $\alpha=0.99$ の場合、リスク量は $\text{VaR}(0.99) = S_{99001}$ 、すなわち総損失額の上位第 1,000 位となる。

(2) 損失額分布の推定手法（パラメトリック手法とノンパラメトリック手法）

① パラメトリック手法

パラメトリック手法は、損失額分布として、予め特定の分布形を仮定する手法である。本稿では、分布形として対数正規分布、ワイブル分布、一般化パレート分布を仮定し¹⁴、パラメータ推定手法としてモーメント法（一般化パレート分布は確率ウェイトモーメント法）、最尤法、最小二乗法を用いる¹⁵。

② ノンパラメトリック手法

パラメトリック手法に対し、損失額分布に特定の分布形を仮定せず、損失データからランダムに損失額を抽出してシミュレーションを行う手法を「ノンパラメトリック手法」と呼ぶ。

¹⁴ 損失額分布は、オペリスクのリスク特性である分布の裾の厚さを表現できるような分布形を選択することが一般的である。なお、損失額分布の候補として、他にもガンマ分布、一般極値分布等様々な分布が存在する。

¹⁵ 本稿で損失額分布として仮定した各分布形の特徴・形状、およびパラメータ推定手法の考え方・特徴については、【補論 2】の(1)、(2)を参照。

本稿では、損失データが L 個存在する場合、それらのデータを損失額の小さい順に X_i ($X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_L$) とし、以下のように損失額を与える関数 X を定義する（ここで p は確率、 $0 < p < 1$ ）。

$$\begin{aligned} X(p) &= X_i, \quad \frac{i-1}{L} \leq p < \frac{i}{L}, \quad i=1,2,\dots,L \\ &= X_{\lfloor Lp+1 \rfloor} \end{aligned}$$

(3) ベンチマークとしてのノンパラメトリック手法

本稿では、ノンパラメトリック手法によるリスク量をパラメトリック手法によるリスク計量結果を評価する際のベンチマークとして用いている。これは、ノンパラメトリック手法は損失額分布に特定の分布形を仮定しないため、算出されるリスク量は、リスク量の基準として一定の客観性を有するものと考えられることによる。

本稿で用いたサンプルデータのデータ数が少ないこと等から、このベンチマーク自体が必ずしも十分に保守的なリスク量にはなっていない可能性にも留意する必要があるが¹⁶、ここではノンパラメトリック手法を基準にその他の手法を評価した。なお、サンプルデータの特徴については次節で述べる。

4. データ

本稿で用いたサンプルデータは、わが国金融機関から集めた 1994 年 1 月～2003 年 12 月の 10 年間のオペリスク損失データのうち、損失額の大きい上位 774 個を基に作成した。この点で、本稿で用いたサンプルデータは、単独の金融機関からみれば、自行の内部損失データに、他行の損失データ（外部損失データ）を加えて作成した「ある銀行の損失データベース」と解釈することも可能なものである。

以下では、オペリスク計量化に用いたこのサンプルデータの特徴を確認するため、本稿で使用するサンプルデータの分布と、同データから推定されたパラメータを持つ対数正規分布（損失額分布を推定する際にパラメトリックな分布形としてよく用いられる）について、幾つかの損失額を選択し、その分位点（分布関数の値）を比較し、サンプルデータの分布の「ファットテール性の強さ¹⁷」を評価した。その結果、【図表 1】に示すとおり、サンプルデー

¹⁶ こうした論点については、6 節で後述する。

¹⁷ 本稿では、2 つの分布関数 $F(x)$, $G(x)$ について、ある金額 x_0 が存在し、 x_0 を超える任意の損失金額 x に対して、 $1 - F(x) > 1 - G(x)$ 、すなわち $F(x) < G(x)$ が成立するとき、 $F(x)$

タの分布は、対数正規分布と比較してファットテール性が強い分布形となっていることが認められた。

(ファットテール性評価の手順)

- ① サンプルデータを金額の小さい順に X_i ($X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_N$) とし、その対数値の平均 (μ) および標準偏差 (σ) を計算し、これらを用いて、

$$Y_i = \frac{\log X_i - \mu}{\sigma}$$

と規格化する。

- ② 規格化されたサンプルデータ Y_i の分布関数を各 Y_i について以下の通り定義する。

$$S_N(Y_i) = \frac{i - 0.5}{N}, i = 1, 2, \dots, N$$

- ③ 標準正規分布の分布関数を $F(x)$ とする。

- ④ 上記②、③で定義した分布関数の値を比較し、サンプルデータのファットテール性を確認する。ここでは、 $x_n = 0.5n$, ($n = 1, 2, \dots, 8$) を選択し、各点について $F(x_n)$ を、また、 S_N については $x_n \leq Y_i$ を満たす最小の Y_i (x_n 以上の最小の分位点にある Y_i) を Y^n とし、 $S_N(Y^n)$ を計算する (仮に $S_N(x_n)$ を定義するとすれば、分布関数の単調非減少性から $S_N(x_n) \leq S_N(Y^n)$ が成り立つ)。

これらをまとめると【図表 1】の通りとなる。 $x_n \geq 1.5$ の全ての損失額において、

$$(S_N(x_n) \leq) S_N(Y^n) < F(x_n)$$

が成立しており、サンプルデータは対数正規分布と比較してファットテールな分布であると評価できる。

で表された分布は $G(x)$ で表された分布よりも「ファットテール性が強い」分布であると定義する。

【図表 1】損失額分布のファットテール性の比較検証

n	x_n	$S_N(Y^n)$ (A)	$F(x_n)$ (B)	差(B-A)
1	0.5	0.76421	0.69146	-0.07275
2	1	0.84690	0.84134	-0.00555
3	1.5	0.90504	0.93319	0.02815
4	2	0.94767	0.97725	0.02958
5	2.5	0.97222	0.99379	0.02157
6	3	0.98385	0.99865	0.01480
7	3.5	0.99160	0.99977	0.00817
8	4	0.99677	0.99997	0.00320

本稿では、以降、このようなファットテール性を持つサンプルデータに対し、様々な計量化手法によるオペリスク計量化を試み、各々の手法の長所、短所を、主に分布のテール部分の当てはまりの良さ、リスク量の妥当性という観点から検討していく。

5. 計量結果とその分析

本節では、3 節、4 節で述べた手法、実損データを用いてオペリスクを計量した結果を比較分析する。

まず(1)でパラメトリック手法のうち、損失額分布に「単一の分布」を仮定する方法でリスク量を算出し、分析する。さらに、(2)で、「単一の分布」を仮定した際に発生する、「分布の一部分で当てはまりが非常に悪くなる問題」を解決する手段として、損失額分布に「合成分布」を仮定する方法により、リスク量を算出し、分析する。

なお、いずれの場合についてもノンパラメトリック手法を用いて算出したリスク量をベンチマークとして、それとの比較でリスク量の水準を評価する。なお、推定された分布の実損データへの適合度合いの評価には、必要に応じ PPプロット、QQプロット¹⁸を用いている¹⁹。

(1) 損失額分布に「単一の分布」を仮定する方法

<リスク計量化手法>

損失額分布に単一の分布を仮定する方法として、対数正規分布、ワイブル分布、一般化パレート分布の 3 種類の分布形を仮定してリスク量を算出した。また、各々の分布形のパラメータについては、最尤法、最小二乗法およびモーメント法（一般化パレート分布については確率ウェイトモーメント法を使用）の 3 種類のパラメータ推定手法を用いて推定を行い、リスク量を算出し、結果を比較した²⁰。推定されたパラメータは【図表 2】の通りとなった。

¹⁸ PPプロットおよびQQプロットに関する解説は【補論 2】(3)を参照。

¹⁹ なお、一般に検定方法として知られている幾つかの統計的手法（たとえば、コルモゴロフスミルノフ検定、アンダーソンダーリング検定等）では、リスク量に大きな影響を与えるテール部分の適合度合いを十分に評価できないため、現在のところPPプロット、QQプロット等視覚的な方法に頼らざるを得ないのが実状である。詳細は、【補論 2】(4)を参照。

²⁰ 本稿で損失額分布として仮定した各分布形の特徴・形状等、パラメータ推定手法の考え方・特徴等については、【補論 2】の(1)および(2)を参照。

【図表 2】損失額分布に単一の分布を仮定した場合における
パラメータ推定結果

	対数正規分布					
	モーメント法		最尤法		最小二乗法	
パラメータ 推定結果	μ	σ	μ	σ	μ	σ
	2.17	2.47	1.48	1.61	1.48	1.47
	ワイブル分布					
	モーメント法		最尤法		最小二乗法	
パラメータ 推定結果	θ	p	θ	p	θ	p
	0.70	0.18	10.85	0.43	10.90	0.63
	一般化パレート分布					
	確率ウェイトモーメント法		最尤法		最小二乗法	
パラメータ 推定結果	β	ξ	β	ξ	β	ξ
	4.57	0.98	3.44	1.10	3.84	0.60

<リスク計量結果>

パラメトリックな損失額分布を用いた場合およびノンパラメトリックな損失額分布を用いた場合の 99%、99.9%信頼区間のリスク量は【図表 3】のとおりである。

これをみると、仮定する分布形、および選択するパラメータ推定手法により、算出されるリスク量に大きな差が生じている。すなわち、対数正規分布、およびワイブル分布を仮定した場合には、モーメント法を用いた場合高額のリスク量が算出された一方、最尤法、最小二乗法を用いた場合低額のリスク量が算出され、その比は 99%信頼区間では、対数正規分布で 42 倍（【図表 3】の(A)）、ワイブル分布で約 65 倍（同(B)）に上った。また、99.9%信頼区間では、同様に対数正規分布で 99 倍（同(C)）、ワイブル分布で約 190 倍（同(D)）に上った。また、一般化パレート分布を仮定した場合には、最尤法を用いた場合高額のリスク量が算出される一方、最小二乗法を用いた場合低額のリスク量が算出され、その比は 99%信頼区間では約 30 倍（同(E)）に、99.9%信頼区間では約 125 倍（同(F)）に上った。

【図表 3】損失額分布に単一の分布を仮定した場合のリスク量

信頼区間		99% (α)	99.9% (β)	$(\beta)/(\alpha)$
対数正規分布	モーメント法	(A)42倍 74.9 (0.75)	(C)99倍 272.6 (1.4)	3.6
	最尤法	2.5 (0.025)	4.4 (0.023)	1.8
	最小2乗法	1.8 (0.018)	2.8 (0.015)	1.6
ワイブル分布	モーメント法	(B)65倍 105.8 (1.1)	(D)190倍 351.7 (1.9)	3.3
	最尤法	3.9 (0.039)	5.0 (0.026)	1.3
	最小2乗法	1.6 (0.016)	1.8 (0.010)	1.1
一般化パレート分布	確率ウェイト モーメント法	(E)30倍 26.8 (0.268)	(F)125倍 255.4 (1.348)	9.5
	最尤法	54.1 (0.541)	686.1 (3.622)	12.7
	最小2乗法	1.8 (0.018)	5.5 (0.029)	3.0
ノンパラメトリック手法		100.0 (1.00)	189.4 (1.00)	1.9

(注 1) リスク量は、ノンパラメトリック手法、99%信頼区間で算出した値を 100 とした相対値を表す。

(注 2) 括弧内は、各信頼区間におけるリスク量の、ベンチマークに対する倍率を表す。

(注 3) シミュレーション回数は 10 万回とする。

< 計量結果の評価と考察 >

パラメトリック手法を用いたオペリスク計量結果を、ノンパラメトリック手法の結果をベンチマークとして評価すると、対数正規分布、ワイブル分布を仮定した場合には、モーメント法でパラメータを推定した場合、99%信頼区間で各々ノンパラメトリック手法によるリスク量の 0.75 倍（【図表 3】の） 1.1 倍（同） 99.9%信頼区間で各々 1.4 倍（同） 1.9 倍（同）となっており、ベンチマークと同等か、あるいはそれを上回るリスク量となっている。一方、最尤法、最小二乗法による場合、いずれもノンパラメトリック手法によるリスク量の 5%未満となっており、ベンチマークを大きく下回っている。

また、一般化パレート分布を仮定した場合には、確率ウェイトモーメント法、最尤法による場合、99%信頼区間では、各々、0.27 倍（同） 0.54 倍

(同⑥) となっており、ベンチマークを下回っているが、99.9%信頼区間では、各々、1.35 倍 (同⑦)、3.62 倍 (同⑧) となっており、ベンチマークを上回る結果となっている。一方、最小二乗法による場合、いずれの信頼区間においても、ノンパラメトリック手法によるリスク量の 3%未満 (同⑨) となっており、ベンチマークを大きく下回っている。

分布形の仮定、パラメータ推定手法によるリスク計量結果の差異は、以下のように解釈することが可能である。

① 分布形の仮定

分布形の仮定の違いによるリスク量の差異は、仮定した分布形のファットテール性の強さの程度により生じている。本稿で用いた損失額分布の中では、一般的にはワイブル分布が最もファットテール性が弱く、以下、対数正規分布、一般化パレート分布の順にファットテール性が強くなることが知られている²¹。

② パラメータ推定手法

本稿の分析では、パラメータ推定手法の違いによる計量結果の差異が極めて大きくなっている。一般に、実損データをパラメトリックな分布で近似する場合、両者の分布形状に大きな差がなければ、パラメータ推定手法が異なってもこうした大きな差は生じない。すなわち、本稿の分析では、仮定した分布と実損データの分布形状に大きな乖離があったことを示している。この点を確認するために、損失額分布に対数正規分布を仮定した場合を例に PP プロットをみると、最尤法および最小二乗法を用いた場合、分布の中心部分（ボディ部分）での適合は良いものの、分布の右端部分（テール部分）では、実損データと比較して、損失額が小さくなる形で乖離が生じていることがわかる。一方、モーメント法を用いた場合には、ボディ部分における実損データの乖離は大きい、テール部分の乖離は小さくなっている。さらに、

²¹ 一般に、一般化パレート分布、対数正規分布、ワイブル分布 ($p < 1$ の場合)、ガンマ分布、ワイブル分布 ($p > 1$ の場合) の順でファットテール性が強い分布である (この中では一般化パレート分布が最もファットテール性が強い) こと、すなわち、各々の分布関数 $F_{GPD}(x), F_{LN}(x), F_{WB,p < 1}(x), F_{GAM}(x), F_{WB,p > 1}(x)$ の間に、十分大きな値 x に対して、

$$F_{GPD}(x) < F_{LN}(x) < F_{WB,p < 1}(x) < F_{GAM}(x) < F_{WB,p > 1}(x)$$

が成立することが知られている。なお、本稿におけるリスク計量に使用されたワイブル分布の形状パラメータ p (ワイブル分布のパラメータについては、【補論 2】(1)を参照) は全て 1 より小となっている。

QQ プロットによれば、最尤法および最小二乗法を用いた場合、特にテール部分について、実損データとの乖離がモーメント法を用いた場合より大きくなっていることが確認できる（次頁の【図表 4】を参照）。

【図表 4】単一の分布を仮定した場合の PP プロット、
QQ プロットによる適合度評価

損失額分布に対数正規分布を仮定し、3 種類のパラメータ推定手法に対して
PP プロット、QQ プロット(※)を描いた結果を示す。

<PP プロット>

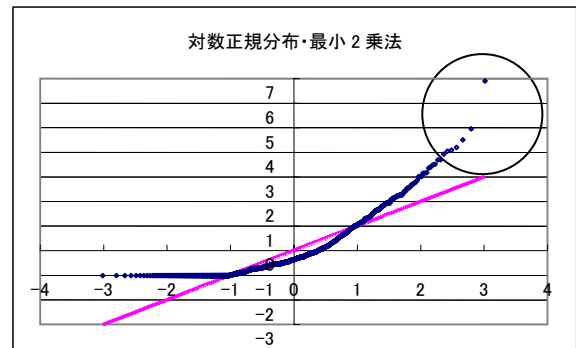
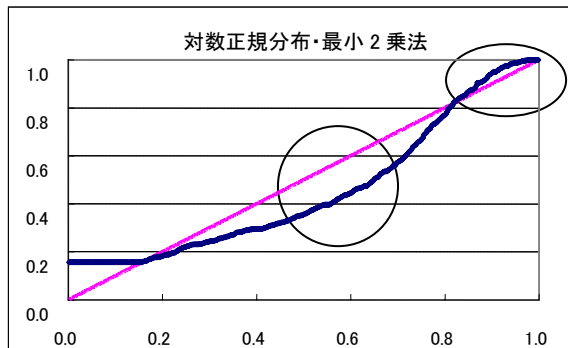
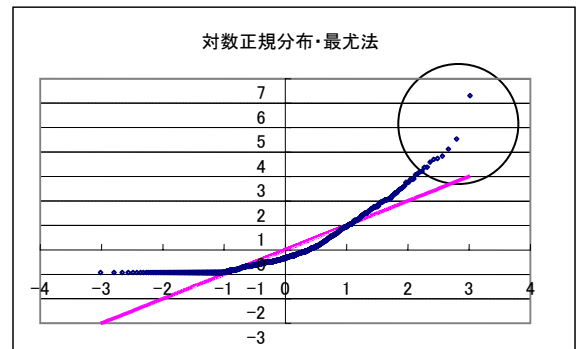
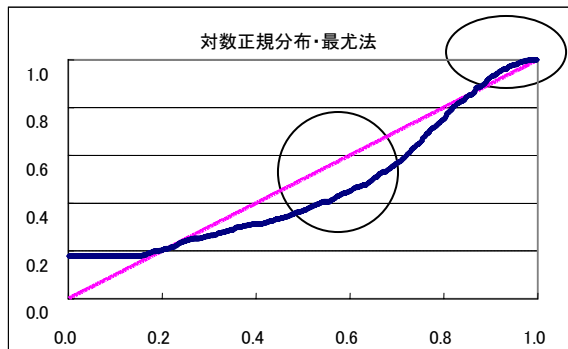
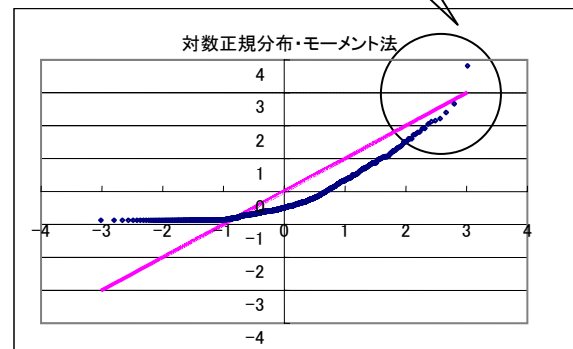
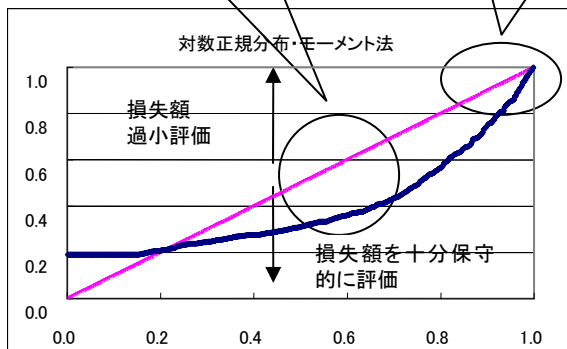
<QQ プロット>

ボディ部分の適合度合いは、最尤法、最小二乗法の方がモーメント法よりも乖離幅が小さいと分かる。

テール部分の適合度合いは QQ プロットで確認(右図)。

QQ プロットでテール部分を強調して表示すると、モーメント法の方が最尤法、最小二乗法よりも乖離幅が小さいと分かる。

・ 実データ
— 推定値



※QQ プロットは、X 軸、Y 軸各々、推定されたパラメータをもとに、推定値、実データの対数値を平均 0、標準偏差 1 として規格化したものを表示している(以降の QQ プロットも同様)。

このように、全区間に亘り実損データを単一のパラメトリックな分布形に適合させることが困難な場合、パラメータ推定手法の違いにより、推定された分布と実損データの分布が適合する部分、乖離が生じる部分が異なっており、結果として算出されるリスク量に大きな差が生じる。

すなわち、モーメント法を用いた場合、ボディ部分における両分布の乖離は大きい一方テール部分での適合が良く、ノンパラメトリック手法によるリスク量(ベンチマーク)と同等あるいはそれを上回るリスク量が算出された。これに対し、最尤法、最小二乗法を用いた場合、ボディ部分において両分布の適合が良い一方、テール部分では大きな乖離が生じ(過小評価となり)、ベンチマークを下回るリスク量が算出された。このことから、特に分布のテール部分における適合状況が、算出されるリスク量に大きな影響を与えることがわかる。したがって、分布のテール部分における実損データとの適合状況を確認した上で分布形を仮定し、パラメータ推定手法を選択することが、リスク量を算出する上で重要と考えられる。

リスク量の妥当性という観点から判断すれば、後述のように、リスク量の計量結果はテール部分に大きな影響を受けるので、このテール部分への当てはまりのよいパラメータ推定手法が望ましいといえる。本稿で用いたサンプルデータに対数正規分布を仮定する場合、選択するパラメータ推定手法としては、最尤法または最小二乗法よりも、モーメント法が適切であると考えられる²²。

しかしながら、仮定した分布とデータの分布形状に大きな乖離がある場合には、仮にある信頼区間で算出したリスク量がベンチマークと同等の水準でも、異なる信頼区間で算出したリスク量がベンチマークと同等の水準になるとは限らない。例えば、分布形に一般化パレート分布を仮定し、パラメータ推定手法として確率ウェイトモーメント法を選択した場合、算出されるリスク量は、信頼区間 99.9%ではベンチマークを上回る一方で、信頼区間 99%ではベンチマークを大きく下回る。

そもそも、サンプルデータのボディ部分からテール部分まで、全範囲に亘り十分に適合するような単一の損失額分布形を見つけることは難しい。これ

²² しかしながら、こうしたパラメータ推定手法とリスク量との関係は必ずしも安定的なものではなく、実損データの分布状況に依存することには注意が必要である。たとえば、三菱信託銀行オペレーション・リスク研究会[2002]では、最尤法によるリスク量がモーメント法によるリスク量を上回っており、パラメータ推定手法とリスク量の大小関係が逆転している。

は、本稿で仮定したどの分布についてもパラメータ推定手法の違いによりリスク量に大きな差が出ていることから確認できる。

こうした理由から、テール部分への適合を改善するための手段として、次項では、「合成分布」による分析を試みる。

(2) 損失額分布に「合成分布」を仮定する方法

<リスク計量化手法>

ここでは、全区間に亘り実損データを単一のパラメトリックな分布形に適合させようとした場合の問題点を回避するため、損失額分布をボディ部分とテール部分に分け、各々に異なる分布形を仮定し、それらを組み合わせて全体として1つの損失額分布（合成分布）を推定してリスク計量を行うことを試みた。すなわち、実損データの金額に境界値（閾値）を設け²³、その前後で異なる2つの分布（ボディ部分の分布と、テール部分の分布）を推定し、これらをまとめて1つの損失額分布（合成分布）を作成した上で、モンテカルロ・シミュレーションを行い、リスク量を算出した。

具体的な合成分布の作成手順は、以下の通りである。

① 閾値の設定

損失データを昇順に並べた際の p 分位点²⁴を超える最小損失額を閾値 $T(p)$ とおき、閾値未満の損失を低額損失、閾値以上の損失を高額損失とする。具体的には、実損データを $L_i, (i=1,2,\dots,L)$ とし、以下のように閾値を定義する。

$$T(p) = L_i, \quad \frac{i-1}{L} \leq p < \frac{i}{L}, \quad i=1,2,\dots,L$$
$$= L_{\lfloor pL+1 \rfloor}, \quad \text{ただし、}\lfloor x \rfloor \text{は } x \text{ を超えない最大の整数を表す。}$$

② 損失頻度分布の推定

損失額分布に単一の分布を仮定した場合と同様に、リスク計測期間（1

²³ 閾値の選択には、本稿で使用したようなパーセント点で設定する方法のほか、ある一定の金額で決定する方法もある。

²⁴ 本稿では、閾値として 90% ($p=0.9$)、95% ($p=0.95$)、99% ($p=0.99$) の 3 種類を仮定。

年間)内に発生する損失件数が従う分布(損失頻度分布)の分布形を推定する。本稿では、ボディ部分とテール部分に対して共通の損失頻度分布を仮定する。すなわち、年間の高頻度低額損失と低頻度高額損失の合計発生件数を N とおき、 N がポアソン分布に従うと仮定する。

③ 損失額分布の推定

(i)~(iii)の手順により、損失が発生した場合の1件当たりの損失額 $X_i, (i=1,2,\dots,N)$ が従う分布(損失額分布)の分布形を推定する。

(i) ボディ部分の損失額分布の推定

ボディ部分の損失額分布(分布関数を $F_b(x)$ とする)を、全ての実損データを用いて推定する²⁵。

(ii) テール部分の損失額分布の推定

テール部分の損失額分布(分布関数を $F_t(x)$ とする)を、「閾値以上の全ての実損データの、閾値からの超過額」のデータを用いて推定する。テール部分の分布形については、前項の「単一の分布を仮定する場合」と同様、対数正規分布、ワイブル分布、一般化パレート分布の3種類を仮定し、テール部分のパラメータ推定手法については、最尤法、最小二乗法およびモーメント法(一般化パレート分布については確率ウェイトモーメント法)の3種類の手法を使用する。

(iii) 分布の合成

(i)、(ii)で作成した分布を閾値において重なり、隙間が生じないように調整した上で繋ぎ合わせて、1つの合成分布(分布関数を $F(x)$ とする)を作成する。

具体的には、ボディ部分の分布関数における閾値 $T(p)$ の分位点を α とし、 $(F_b(T(p)) = \alpha)$ 、 $F(x)$ の分布関数を以下の通りとする。

²⁵ 本稿では、ボディ部分の損失額分布の分布形、およびパラメータ推定手法については、閾値をどの点に設定した場合においても分布形の仮定、パラメータ推定手法の選択がリスク量に有意な影響を与えていないことが数値的に確認できたため、各々1種類(対数正規分布、モーメント法)を選択した。

$$F(x) = \begin{cases} \frac{p}{\alpha} F_b(x), & 0 \leq x < T(p) \\ p, & x = T(p) \\ p + (1-p)F_l(x-T(p)), & T(p) < x \end{cases}$$

すなわち、ボディ部分の分布については、閾値未満の部分の密度関数の面積が100p%になるように分布関数の値をスケーリングし、テール部分の分布については、閾値以上の部分の密度関数の面積が100(1-p)%になるように分布関数の値をスケーリングした。

なお、この方法は、2つの異なる分布形を繋ぎ合わせて1つの分布を構成するという点において、極値理論（POT手法）²⁶の考え方を取り入れたものであるが、厳密な意味で同手法をそのまま適用したものではない。これは、本稿で用いたサンプルデータでは、閾値を90%、95%、99%のいずれに設定しても、閾値以上の高額損失部分において一般化パレート分布への十分な適合を確認できなかったためである。このため、「閾値を十分大きくとれば、閾値からの超過金額の分布が一般化パレート分布で近似できる」という定理（Pickands-Balkema-de Haanの定理）を使う²⁷ことはせず、①閾値の選択については必ずしも統計的な根拠を求めることなく複数の値を候補として与え、②テール部分の分布形について一般化パレート分布以外の分布形も仮定する。極値理論（POT手法）が求める統計的な理由付けが十分満たされない場合においても、高頻度低額損失と低頻度高額損失では損失発生原因が異なる²⁸ため、各々に異なる分布形を仮定し、各々の分布に対してパラメータ推定を行うことは、実務上の1つの試みとしては意味があると考えられる。

合成分布を仮定した場合における、テール部分のパラメータ推定結果は【図表5】の通りとなった²⁹。

²⁶ 脚注9を参照。

²⁷ 極値理論（POT手法）を厳密な意味で適用するのであれば、閾値を実損データの下位から100p%点とした場合、実損データの上位100(1-p)%以上のデータに対し、それらのデータの閾値からの超過金額が一般化パレート分布に従っているかを確認することが必要になる。そして、その条件が満たされた場合に対し、①上位100(1-p)%以上に対し一般化パレート分布を仮定し、②残りのデータ（下位100p%未満）に対しその他の分布形を仮定した上で、各々の分布のパラメータを推定した後、これらを閾値において組み合わせて1つの損失分布形として、これを基にしてリスクを計量することとなる。

²⁸ オペレーショナルリスク管理高度化勉強会[2006]参照。

²⁹ 分布のボディ部分のパラメータは、全ての場合において、対数正規分布、モーメント法で算出した値（ $\mu = 2.17, \sigma = 2.47$ ）を使用した。

【図表 5】損失額分布に合成分布を仮定した場合における
テール部分のパラメータ推定結果

テール部分	対数正規分布					
	モーメント法		最尤法		最小二乗法	
閾値	μ	σ	μ	σ	μ	σ
90%	5.51	1.98	4.41	1.96	4.41	2.02
95%	6.49	1.81	5.21	2.19	5.21	2.34
99%	8.66	1.38	7.72	1.77	7.72	2.19
テール部分	ワイブル分布					
	モーメント法		最尤法		最小二乗法	
閾値	θ	p	θ	p	θ	p
90%	106.27	0.267	231.07	0.426	218.11	0.571
95%	418.59	0.309	560.57	0.419	543.01	0.501
99%	6864.16	0.478	6018.15	0.477	7020.14	0.420
テール部分	一般化パレート分布					
	確率ウェイトモーメント法		最尤法		最小二乗法	
閾値	β	ξ	β	ξ	β	ξ
90%	130.80	0.925	44.16	2.40	62.91	1.36
95%	380.68	0.888	74.69	2.93	151.09	1.54
99%	5334.73	0.643	567.35	2.99	1355.95	1.30

<リスク計量結果>

合成分布を用いた場合の 99%、99.9%信頼区間のリスク量は【図表 6】のとおりである。単一の分布を用いた場合と同様、ベンチマークとしたノンパラメトリック手法によるリスク量を表中に記入している。なお、一般化パレート分布を仮定し、最尤法によりパラメータ推定を行った場合、リスク量が巨大な値となったため、結果の記載を省略した。ちなみに、この結果を、同分布を確率ウェイトモーメント法でパラメータ推定した場合のリスク量と比較したところ、99%信頼区間で 1,000 倍以上、99.9%信頼区間で 10,000 倍以上のリスク量となった。これは、一般化パレート分布の形状パラメータの推定値が 1 を超えた（極めて裾の厚い分布形が推定された）ことが原因と考えられる³⁰。

³⁰ なお、一般化パレート分布のパラメータとその特徴については【補論 2】(1)を参照。

【図表 6】損失額分布に「合成分布」を仮定した場合のリスク量

(条件)

- ・データ: サンプルデータについて、データの高額損失部分(90%、95%、99%点以上)をテール部分と仮定する。
- ・テール部分(分布形)対数正規分布、ワイブル分布、一般化パレート分布
(パラメータ推定手法)モーメント法(一般化パレート分布の場合、確率ウェイトモーメント法)、最尤法、最小二乗法
- ・ボディ部分(分布形)対数正規分布
(パラメータ推定手法)モーメント法
- ・シミュレーション回数: 10 万回

リスク量の
差が小さい

テール部分の分布形	パラメータ推定手法	99%信頼区間で推定				99.9%信頼区間で推定			
		閾値			単一分布	閾値			単一分布
		90%	95%	99%		90%	95%	99%	
対数正規分布	モーメント法	93.1	100.9	120.4	74.9	297.7	316.1	314.0	272.6
	最尤法	29.7	76.9	107.9	2.5	92.0	300.2	395.0	4.4
	最小2乗法	35.5	115.9	262.2	1.8	114.8	527.0	1,412.2	2.8
ワイブル分布	モーメント法	120.7	126.2	140.1	105.8	346.2	328.7	318.9	351.7
	最尤法	22.8	41.3	124.1	3.9	40.2	80.7	284.9	5.0
	最小2乗法	9.1	22.2	213.1	1.6	13.1	37.7	563.1	1.8
一般化パレート分布	確率ウェイトモーメント法	61.1	77.1	120.0	26.8	453.4	556.0	505.6	255.4
	最尤法	—	—	—	54.1	—	—	—	686.1
	最小2乗法	345.4	782.5	257.6	1.8	7,513.0	22,953.3	4,396.5	5.5
ノンパラメトリック手法					100.0				189.4

・リスク量(単一分布、ノンパラメトリック手法、99%信頼区間で算出した値を 100 とした相対値)

境界点	90%	95%	99%
境界点の値	0.04	0.10	0.85
ボディ部分のデータ数	696	735	766
テール部分のデータ数	78	39	8

99%信頼区間: モーメント法と同レベル、
99.9%信頼区間: モーメント法はノンパラメトリック手法の 1.5 倍程度

前項で分析した単一の分布を用いた場合のリスク量と比較すると、合成分布を用いた場合、分布形の仮定、パラメータ推定手法の選択によるリスク量の差異は、閾値の選択に依らず小さくなっていることが確認できた。その中でも、パラメータ推定手法をモーメント法とした場合、他のパラメータ推定手法を選択した場合と比較して分布形の仮定によるリスク量の差異が小さくなることが確認できた。

一方、閾値の選択とリスク量との関係をみると、一部の場合を除き、閾値を大きくするとリスク量が高額になる傾向がみられた。これは、閾値を大きくすると、その値を超えるデータの数が少なくなり、上位数個の高額損失データのパラメータ推定への影響が大きくなった結果と考えられる。

こうした中、モーメント法によりパラメータ推定を行った場合、閾値の選択によるリスク量の差異も小さくなる傾向がみられた。すなわち、対数正規分布およびワイブル分布を仮定し、モーメント法によりパラメータ推定を行った場合、閾値の選択によるリスク量の差異は小さいが、最尤法、最小二乗法によりパラメータ推定を行うと、その差異が大きくなる。また、一般化パレート分布を仮定し、確率ウェイトモーメント法によりパラメータ推定を行った場合、閾値の選択によるリスク量の差異は小さいが、最小二乗法によりパラメータ推定を行った場合、その差異がかなり大きい。

<計量結果の評価と考察>

合成分布を用いたリスク計量化手法は、単一の分布によるリスク計量化手法に比べ、分布形の仮定やパラメータ推定手法の選択によるリスク量の差異が小さいという点で、より優れた方法であると評価できる。

さらに、テール部分の分布形として対数正規分布およびワイブル分布を仮定し、モーメント法によりパラメータ推定を行った場合、算出されるリスク量は 99%信頼区間においてベンチマークとほぼ同程度、99.9%信頼区間においてもベンチマークの約 1.5 倍となっており、ベンチマークと概ね同程度のリスク量が算出された。

一方、一般化パレート分布を仮定し、最尤法を用いる場合においては、前述のとおりノンパラメトリック手法の 10,000 倍以上にのぼる巨大なリスク量が算出された。単一の分布を仮定した場合と同様に、合成分布を用いても、パラメータ推定手法の選択によるリスク量の差異が大きくなる場合があり、特に一般化パレート分布を仮定する場合は注意が必要である。

次に、合成分布の適用、パラメータ推定手法について、90%点を閾値とし、

対数正規分布を仮定した場合を例に、単一の分布形を仮定した場合と同様に PP プロットおよび QQ プロットを用いて分析を行った（【図表 7】～【図表 9】を参照）。

【図表7】合成分布を仮定した場合(閾値:90%点)の

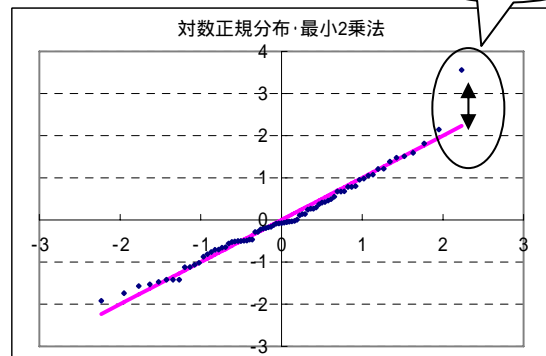
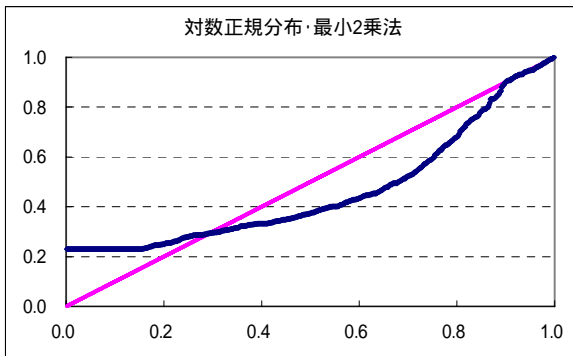
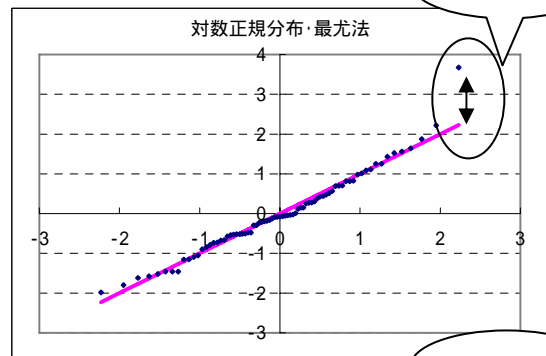
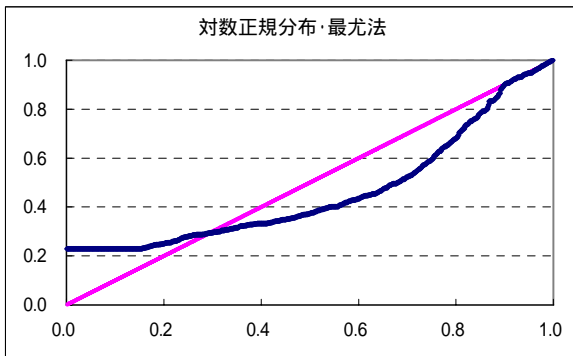
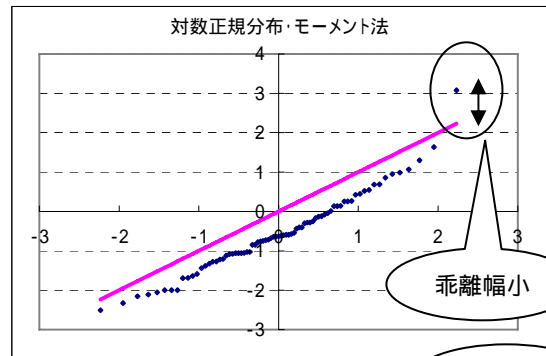
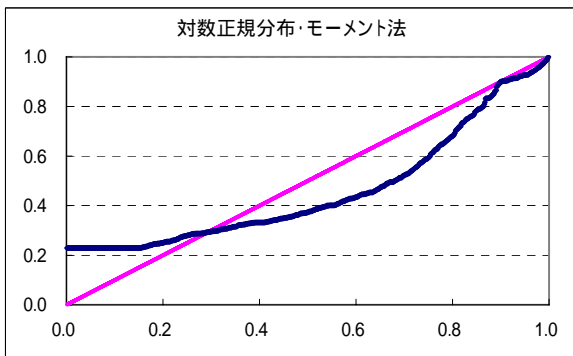
PP プロット、QQ プロットによる適合度評価

モーメント法では、(リスク量に与える影響力が大きい)最上位のデータにおける乖離幅が最尤法、最小二乗法の場合よりも相対的に小さいことが確認できる。

<PP プロット>
(ボディ部分も含めた全区間)

<QQ プロット>
(テール部分のみ)

・ 実データ
・ 推定値



閾値を超えるデータについて、「閾値からの超過額をもとに推定された分布上の推定値」と、「実データの閾値からの超過額」の乖離状況を表示したもの(図表9の合成分布のQQプロットも同様)。

【図表 8】テール部分(90%以上の点)における PP プロットによる適合度の比較

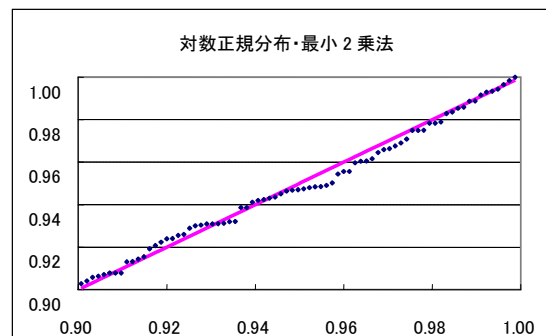
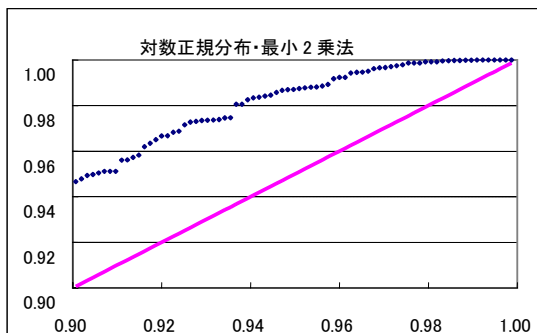
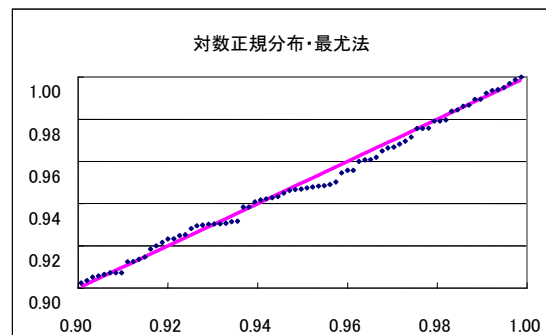
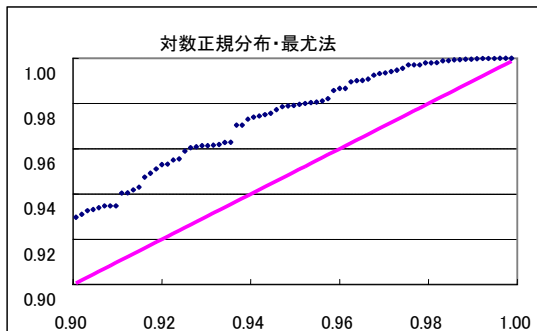
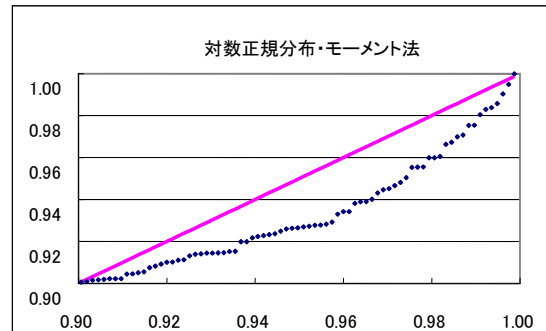
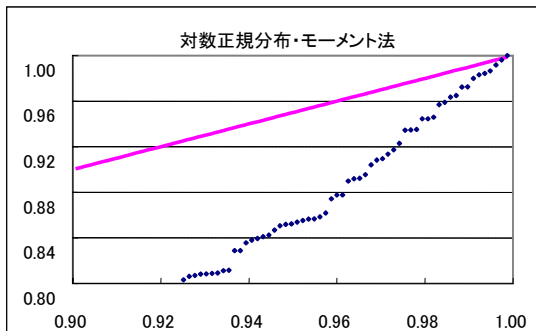
90%以上の部分のみに限定してみると、合成分布を適用することにより、単一分布を用いた場合と比較して、どのパラメータ推定手法を用いた場合でも、適合度が向上していることが分かる。

単一分布
(対数正規分布を仮定)



合成分布適用
(ボディ部分、テール部分双方について対数正規分布を仮定)

・ 実データ
— 推定値

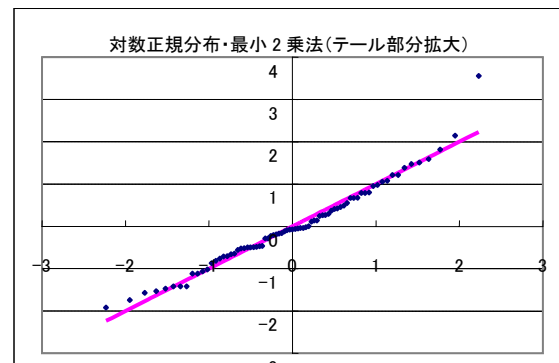
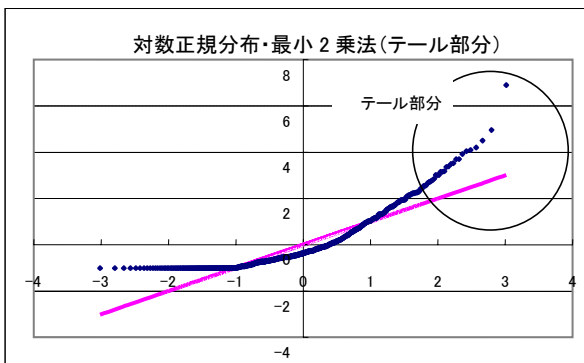
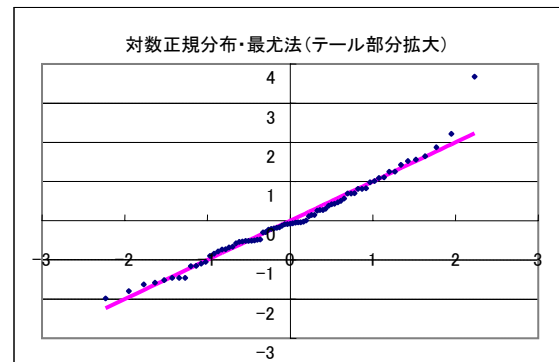
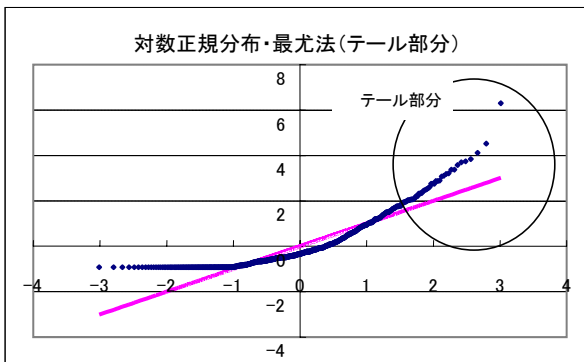
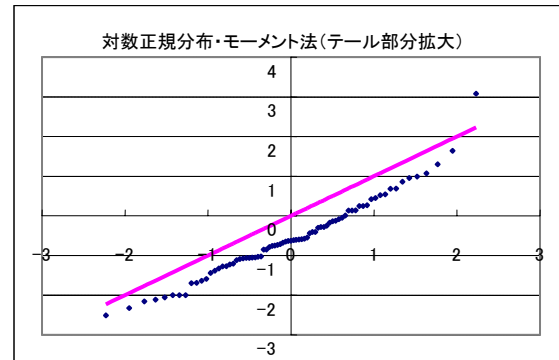
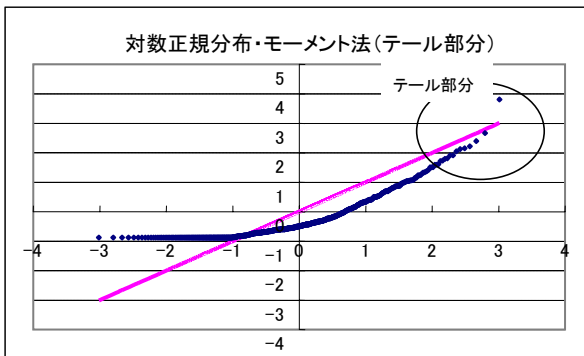
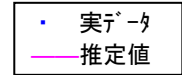


【図表 9】テール部分(90%以上の点)における QQ プロットによる適合度の比較

合成分布を適用した場合の適合度合いについて、さらに QQ プロットにより比較した。パラメータ推定手法の違いによる、分布の右端部分の適合状況の違いが確認できる。

単一分布(ボディ部分も含めた全区間)

合成分布(テール部分のみ)



① 合成分布の適用

90%点以上の範囲をみると、どのパラメータ推定手法を用いた場合でも、合成分布を用いることにより、単一の分布を用いる場合と比較して推定された分布の実損データに対する適合度合いが改善している。このことは、パラメータ推定手法の選択によるリスク量の差異が小さくなっている点にも表れている。

② パラメータ推定手法

仮定する分布形の違いによるリスク量算出結果の差異は、モーメント法を用いる場合に、最尤法、最小二乗法を用いる場合よりも小さくなっている。これは、(i)単一の分布を仮定した場合と同様、合成分布を仮定した場合においても、モーメント法を用いた場合には、最尤法、最小二乗法を用いた場合に比べ、閾値以上の高額損失部分における推定された分布と実損データの分布の乖離幅が小さくなっていること、そして(ii)リスク量が、分布の全体から同程度に影響を受けるのではなく、分布のテール部分から大きな影響を受けるということ、によるものと考えられる。また、両分布の乖離幅は仮定する分布形により異なり、その影響がリスク量の差異に現れていると考えられる。

したがって、本稿で用いたサンプルデータに関して言えば、損失額分布のパラメータ推定には、「ボディ部分の適合が良い最尤法、最小二乗法」よりも、「テール部分の適合が良いモーメント法」を選択することが相対的に適切であるということになる。

<留意点>

最後に、合成分布を仮定する場合に重要となる、①閾値の選択、②一般化パレート分布を使用する場合の留意点等について考察する。

① 閾値の選択

本稿の計算手法において、合成分布の閾値を統計的に選択する有効な方法を見出すことはできなかった。そこで、これに代わる方法を考察すると、リスク量の安定性という観点、すなわち、今後の損失発生に伴い生じ得る実損データの変化が、算出されるリスク量に与える影響を極力抑える、という観点から閾値を選択することが考えられる。すなわち、今後の実損データの追加または削除により、閾値のパーセント点を一定に保っても閾値の金額が変化する可能性があり、その際、算出されるリスク量が大きく変化しないように閾値を選択するという方法である。仮に、データの収集期間やデータ数が

十分であれば、使用するデータの期間を少しずつずらして、その際のリスク量の変化を評価することにより、適切な閾値を決定することも考えられる。しかしながら、本稿で用いたサンプルデータのようにデータの収集期間、およびデータ数が必ずしも十分でない場合には、たとえば、設定する閾値のパーセント点を変えることにより、異なる金額の閾値のもとでリスクを計量し、リスク量の変化が過度に大きくならないようにする、といった方法も考えられる。

具体的には、①閾値の変化に対してリスク量が大きく変化しないようなパラメータ推定手法を選択し、②そのもとで、(i)異なる閾値を与えて算出されるリスク量を観測し、(ii)リスク量が大きく変化しないような閾値の範囲を特定した上で、(iii)その範囲の中から選択する閾値を決定する、といった方法である。

例えば本稿の例では、①パラメータ推定手法としてモーメント法を選択し、②90%、95%、99%の3点を閾値としてリスクを計量したが、【図表 10】のように、更に細かい区分で閾値を与えてリスクを計量し、リスク量の差³¹がなるべく小さくなるような範囲の中から閾値を採用することも考えられる。すなわち、以下の例では 92%点（信頼区間 99.0%の場合）、93%点（信頼区間 99.9%の場合）を閾値として選択することになる。

³¹ ここでは差を、閾値を p %とした時のリスク量を C_p として、

$$\frac{1}{2}(|C_p - C_{p-1}| + |C_{p+1} - C_p|)$$

としている。

【図表 10】閾値を段階的に与えた場合のリスク量

閾値 (%)	信頼区間			
	99.0%		99.9%	
	リスク量	差	リスク量	差
90	93.1		297.7	
91	94.5	1.2	307.3	9.1
92	95.5	1.1	298.8	5.8
93	96.7	1.4	295.6	2.0
94	98.4	2.1	296.5	10.2
95	100.9	2.7	316.1	10.3
96	103.8	2.3	317.1	7.3
97	105.5	3.2	303.6	18.5
98	110.2	7.5	327.1	18.3
99	120.4		314.0	

(注1)リスク量は、ノンパラメトリック手法、99%信頼区間で算出した値を 100 とした相対値

(注2)テール部分の分布形:対数正規分布

(注3)パラメータ推定手法:モーメント法

(注4)閾値:90%~99%の範囲において 1%刻みで設定

(注5)シミュレーション回数:10 万回

② 一般化パレート分布を使用する場合の留意点

損失額分布に一般化パレート分布を適用する場合には、最尤法および最小二乗法を用いてパラメータ推定した場合のように、実損データの分布形状によっては巨大なリスク量が算出される可能性がある。このため、一般化パレート分布が「統計的な理由付け³²」、「分布形の適合」という両面で適切と判断された場合においても、実損データの内容の変化に伴い巨大なリスク量が算出される可能性があることに十分注意することが必要と考えられる。

³² 平均超過プロット (森本[2000]を参照) 等の統計的手法により、閾値を超える部分のデータの閾値からの超過額が一般化パレート分布に従っていることが確認される場合等が考えられる。

6. まとめ

本稿では、金融機関のオペリスク損失データを集めて作成したサンプルデータに対し、損失分布手法（パラメトリック手法）を前提に、分布形およびパラメータ推定手法の組合せによりオペリスク量を算出し、それぞれの計量化手法の長所、短所を比較してきた。本節では、オペリスク計量化に関する、より実務に即した考察や残された課題をまとめる。

まず、本稿の分析によって明らかになった点を整理する。第一に、計量化手法を選択する際に、様々な分布形の仮定およびパラメータ推定手法の組合せによりリスク量の試算を行い、その差異を分析することで、仮定した損失額分布の実損データへの適合性に関する情報が得られる。すなわち、パラメータ推定手法の選択によって、算出されるリスク量が大きく異なる場合、仮定した損失額分布が実損データに適合していないことが示唆される。第二に、対数正規分布と比較してファットテール性が強いような実損データに対して合成分布を適用したところ、単一の分布を当てはめる場合に比べ、実損データへの適合性が大きく改善する。

一方、本稿の分析に関する今後の課題としては、次の 3 点が挙げられる。第一に、損失分布手法によるオペリスク計量化手法について、損失額分布の推定手法に絞って議論してきたが、本稿で使用した実損データについて、一般に最適といえるような分布形、パラメータ推定手法を合理的に見出すまでには至っていない。第二に、合成分布を用いたリスクの計量化において、算出結果の安定性という観点から閾値の設定方法を提案したが、ボディ部分とテール部分の閾値を統計的に説明力のある形で設定することは、実務上は容易ではない。第三に、99%、99.9%という高い信頼区間でリスク量を推定するためには、ほぼ 100 年に 1 回、1,000 年に 1 回しか発生しないような低頻度高額損失データが必要である³³が、本稿のように実損データのみを用いて計量する場合に、そのようなデータを確保することは、現実問題として難しい³⁴。

³³ これは、「(設定する) 信頼水準」と「リスク量に影響を与える損失額分布の範囲 (どの程度稀にしか発生しないような高額損失事例まで考慮すべきか)」の関係 (詳細は、【補論 1】を参照) から導かれる。この結果から判断すれば、本稿でベンチマークとして用いた「ノンパラメトリック手法による計量結果」が過小評価になっている可能性が否定できないと考えられる。

³⁴ なお、この点に対応するためには、実際に金融機関でも行われているように外部データやシナリオ分析によるデータの補完が重要になる。

最後に、本稿の中で議論されなかった今後の課題となる重要な論点として以下の3点を挙げる。

①シナリオ分析によるデータを導入した計量モデルは、実損データには含まれていないような低頻度高額損失データを補うために有効な方法であるが、特に低頻度高額損失のケースにおけるシナリオの網羅性をどのように確保するか。

②イベントタイプやビジネスライン³⁵別など、リスク計量単位の選択基準をどのようにして合理的に定めるか、またそれら計量単位間の相関関係をどのようにリスク量へ反映させるか³⁶。

③時間変化に対するリスク量の安定性をどのように確保するか³⁷。

以上のように、オペリスクの計量化の分野には、引続き多くの課題が残されている。私共としては、今後とも本分野における実証分析、研究、意見交換を継続していきたいと考えている。本稿をもとに、こうした議論が活発化していくことを期待している。

³⁵ 脚注8参照。

³⁶ 金融機関のオペリスク特性は、ビジネスライン、イベントタイプごとに異なりうるという観点から、損失データをビジネスライン、イベントタイプに分けて、より細かい計量単位でリスク量を計量している例も存在する。しかしながら、計量単位間の相関関係や依存関係のモデル化は、未だほとんど実用化されていないのが現状である。

³⁷ 時間の経過に伴い、金融機関の実損データが変化していく中、オペリスク計量化モデルが仮定する損失額分布が実損データに適合しなくなる等が考えられるが、モデルの継続的な使用可能性をどのように検証するかについて、必ずしもコンセンサスが得られているわけではない。

【補論1】「リスク計量における信頼区間」と「リスク量に影響を与える損失データの範囲」の関係について

ここでは、まず(1)でリスク量を算出するために必要な損失データの範囲について示した上で、ノンパラメトリック手法による計量結果が過小評価となる可能性について述べる。このことを、まず①で、簡単なノンパラメトリック手法による例を基に、「(設定する) 信頼区間」と「リスク量に影響を与える損失額分布の範囲（どの程度稀にしか発生しないような高額損失事例まで考慮すべきか）」との関係を導くことにより示す。さらに②で、同様の関係が一般に損失分布手法において成立することを解析的に示す。

その後、(2)でモンテカルロ・シミュレーション（以下「シミュレーション」）を行わず、解析的近似解によりオペリスク量を推定する方法を紹介し、最後に(3)で解析的近似解とシミュレーション結果を比較し、評価する。

(1)「信頼区間」と「リスク量に影響を与える損失額分布の範囲」の関係

①単純化した数値例による説明

以下で示す例では、2種類の損失事例（低頻度高額損失、高頻度低額損失）からなる損失データに対して、幾つかの信頼区間においてリスク量を計算した。具体的には、(i)100年に1回、(ii)1,000年に1回という発生頻度の低い高額損失事例を含むサンプルデータに対し、ノンパラメトリックな損失額分布を持つモデルを設定し、シミュレーションによりリスク量を計算した³⁸。

(モデルの構成)

(i)高額損失が100年に1回の頻度で発生する場合

単純化のため、当該高額損失以外は全て低額損失とし、その発生頻度を100（回/年）とする。また、高額損失、低額損失、各々の損失額を、100,000、1とする。このとき、100年間に、高額損失が1回、低額損失が10,000回発生することから、損失頻度分布（ポアソン分布）のパラメータ（年間平均損失発生件数）は、

$$\lambda = 100.01$$

となる。また、損失額を与える関数 X を、各損失事例の構成比率により以下のように定義する（ここで p は確率、 $0 < p < 1$ ）。

³⁸ なお、シミュレーションでこの結果を確認するためには、十分な試行回数が確保されていることが必要である。

$$X(p) = \begin{cases} 1, & 0 \leq p < \frac{10000}{10001} \\ 100000, & \frac{10000}{10001} \leq p < 1 \end{cases}$$

(ii)高額損失が 1,000 年に1回の頻度で発生する場合

高額損失の発生頻度（1,000 年に 1 回とする）および損失額（1,000,000 とする）以外は①と同一とすれば、①と同様に、1,000 年間に高額損失が 1 回、低額損失が 100,000 回発生することから、損失頻度分布（ポアソン分布）のパラメータ（年間平均損失発生件数）は、

$$\lambda = 100.001$$

となる。また、損失額を与える関数 X を、各損失事例の構成比率により以下のように定義する。

$$X(p) = \begin{cases} 1, & 0 \leq p < \frac{100000}{100001} \\ 1000000, & \frac{100000}{100001} \leq p < 1 \end{cases}$$

以上の前提で、99%、99.1%、99.9%、99.91%の 4 種類の信頼区間においてリスク量を算出した結果を【図表 A】に示す。

【図表 A】計量結果(リスク量の比較)

		低頻度高額損失の発生頻度	
		(i)100 年に 1 回	(ii)1,000 年に 1 回
信頼区間	99.00%	138	124
	99.10%	100,086	125
	99.90%	100,114	149
	99.91%	100,115	1,000,088

(シミュレーション試行回数:10 万回)

この結果から、99%、99.9%信頼区間より僅かに大きい信頼区間（99.1%、99.91%）でリスク量を求める場合、各々、100 年に 1 回、1,000 年に 1 回発生するような高額損失事例までリスク量に反映されていることがわかる。このことから、99%、99.9%信頼区間でリスク量を求めるような場合、各々100 年に 1 回、1,000 年に 1 回に極めて近い高額損失事例までリスク量に反映されていると考えられるため、こうした高額損失事例まで、損失データとして考慮する必要があると考えられる。

次に、上記シミュレーションにおいて導かれた「信頼区間」と「リスク量に影響を与える損失額分布の範囲」の関係について、解析的に評価する。

②信頼区間と高額損失データに求められる発生頻度の解析的な関係

①において、100年に1回、1,000年に1回発生する損失事例を基に、「信頼区間」と「リスク量に影響を与える高額損失データの発生頻度の範囲」の関係を数値的に確認したが、ここでは、その関係を解析的に示す。

一般化のため、高額損失（損失額 L_N ）の発生頻度を N 年に1回（ $N > 1$ ）、低額損失（損失額 1 （ $1 < L_N$ ））の発生頻度を1年に m 回（ $m > 1$ ）として問題を定式化する³⁹。このとき、年間平均損失発生件数（ λ ）、および、 N 年分の全損失データに対する高額損失データの比率（ R ）は以下の式で定義できる。

$$\lambda = m + \frac{1}{N}, \quad R = \frac{1}{N\lambda}, \quad 0 < R < 1 \quad (\because N\lambda > 1)$$

また、損失額を与える関数 X を、各損失事例の構成比率により以下のように定義する。

$$X(p) = \begin{cases} 1 & (\text{低額損失額}), \quad 0 \leq p < 1 - R \\ L_N & (\text{高額損失額}), \quad 1 - R \leq p < 1 \end{cases}$$

このとき、年間総損失額に高額損失データが少なくとも1個含まれる確率 P は以下のように計算することができる（なお、 $P_\lambda(x)$ はポアソン分布の確率分布）。

$$P = \sum_{x=0}^{\infty} P_\lambda(x) \{1 - (1 - R)^x\}, \quad P_\lambda(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

ここで、この確率 P の大きさは、年間平均損失発生件数（ λ ）とは無関係に、高額損失の発生頻度のみ依存する以下の不等式で評価できる（証明は

³⁹ 極めて小さい確率ではあるが、「低額損失のみで構成される年間総損失額が、高額損失額以上となる確率（ P_s ）」が存在する。そこで、この確率（ P_s ）が十分小さくなるように高額損失額を設定する。具体的には、推定されたポアソン分布から、確率（ P_s ）を評価し、その確率と、高額損失が少なくとも1個含まれる確率（ P ）（ $\frac{1}{N+1} < P < \frac{1}{N}$ と評価される。証明はP.36-P37を参照）の合計が $\frac{1}{N}$ より小さくなるように高額損失額 L_N を決定する。このように設定することにより、高額損失データの発生頻度が N 年に1回の場合、年間総損失額が高額損失額以上になる確率（ $P_N = P + P_s$ ）を、 $\frac{1}{N+1} < P < P_N < \frac{1}{N}$ と評価できる。

また、高額損失額 L_N は、発生頻度が低くなるほど損失額が高額になるように決定する（ L_N は、 N （高額損失の発生頻度の逆数）に関する増加関数となるように決定する）。

後述)。

$$\frac{1}{N+1} < P < \frac{1}{N}$$

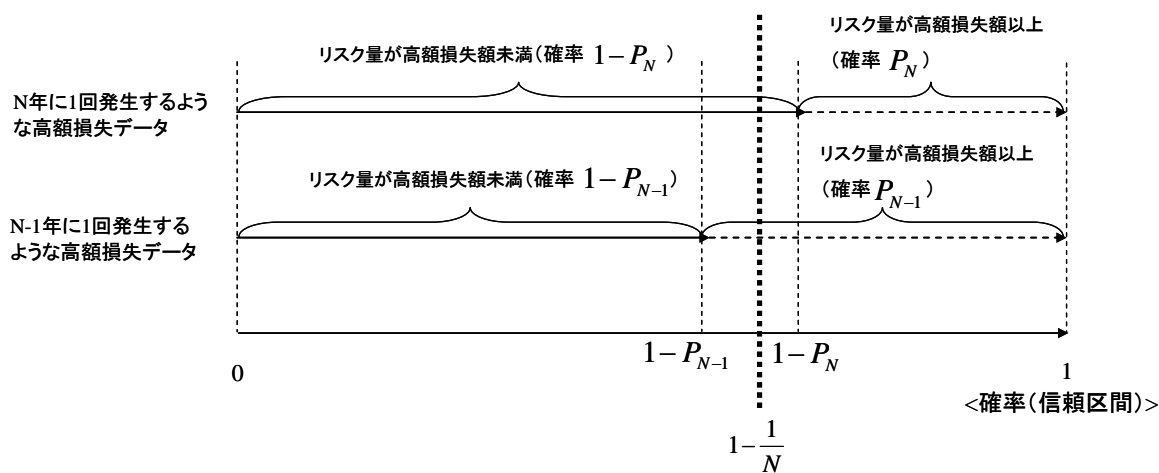
これにより、脚注 39 で示した条件のもとでは、高額損失データの発生頻度が N 年に 1 回の場合、年間総損失額が高額損失額以上となる確率 (P_N) は年間平均損失発生件数とは無関係に、 $\frac{1}{N+1} < P_N < \frac{1}{N}$ と評価できる。同様に、高額損失データの発生頻度が $(N-1)$ 年に 1 回の場合、同確率 (P_{N-1}) は、 $\frac{1}{N} < P_{N-1} < \frac{1}{N-1}$ と評価できる。

これらの式から、

$$1 - P_{N-1} < 1 - \frac{1}{N} < 1 - P_N \quad (P_N < \frac{1}{N} < P_{N-1})$$

の式が導かれる。

これは、 $(1 - \frac{1}{N}) \times 100\%$ 信頼区間で推定されるリスク量は、 $(N-1)$ 年に 1 回の高額損失額を超えるが、 N 年に 1 回の高額損失額以上にはならないことを示しており、同信頼区間で推定されるリスク量は、 $(N-1)$ 年に 1 回の高額損失額と N 年に 1 回の高額損失額の間にあると考えられる (下図を参照)。



⇒ $(1 - \frac{1}{N}) \times 100\%$ 信頼区間のリスク量は、 $N-1$ 年に1回発生するような高額損失額以上、 N 年に1回発生するような高額損失額未満の値となる。

したがって、① $(1-\frac{1}{N})\times 100\%$ 信頼区間でリスク量を推定する場合、少なくとも $(N-1)$ 年に1回の頻度で発生する高額損失事例まで考慮することが必要であること、②発生頻度が N 年に1回以下の高額損失事例を考慮してもリスク量には織り込まれないことが分かる。なお、③ $(N-1)$ 年に1回から N 年に1回の間頻度で発生する高額損失事例は、リスク量に含まれる可能性があるため、リスク量の推定にあたって、考慮する必要がある(②とあわせれば、 N 年に1回発生する高額損失事例まで考慮すれば十分である)⁴⁰。

これは、例えば、99%、99.9%信頼区間でリスク量を推定する場合、発生頻度が各々、99年に1回、999年に1回の高額損失事例まで考慮することが少なくとも必要で、発生頻度が各々100年に1回、1,000年に1回以下の高額損失事例はリスク量に影響を与えないことを示している。これは、【図表A】に示した計量結果とも整合的である。

一般に、金融機関では、このような高額損失事例の発生データが蓄積されていない可能性が高い。したがって、実損データのみを用いてノンパラメトリック手法によりリスク量を算出する場合、特に、99.9%以上の信頼区間でリスク量を算出する場合は、その値が過小評価になっている可能性が考えられる。

<不等式 $\frac{1}{N+1} < P < \frac{1}{N}$ ($1 < N$) の証明>

$$P = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \{1 - (1-R)^x\} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} - \sum_{x=0}^{\infty} (1-R)^x = 1 - e^{-\frac{1}{N}}$$

(i) $P < \frac{1}{N}$ の証明

$$H(N) = \frac{1}{N} - P = \frac{1}{N} - (1 - e^{-\frac{1}{N}}) = \frac{1}{N} - 1 + e^{-\frac{1}{N}}$$

とおく。以下、 $H(N) > 0$ を証明する。

$$H'(N) = -\frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^2} e^{-\frac{1}{N}} = -\frac{1}{N^2} (1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{N}}})$$

ここで、 $e^{\frac{1}{N}} > 1$ ($1 < N$) より、 $H'(N) < 0$

⁴⁰ これは、リスク量を表す指標としてVaRを採用した場合に成り立つが、リスク量としてその他の指標(例:期待ショートフォール)を用いた場合は、より発生確率が低い高額損失事例がリスク量に大きな影響を与えることもある。

また、 $H(1) = 1 - 1 + e^{-1} = \frac{1}{e} > 0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} H(N) = 0$ ($\because \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{N}} = 1$)

従って、 $H(N) > 0$ ($1 < N$)

$$\therefore P = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \{1 - (1-R)^x\} < \frac{1}{N}$$

が証明された。

(ii) $\frac{1}{N+1} < P$ の証明

$$G(N) = P - \frac{1}{N+1} = (1 - e^{-\frac{1}{N}}) - \frac{1}{N+1} = -\frac{1}{N+1} + 1 - e^{-\frac{1}{N}}$$

とおく。以下、 $G(N) > 0$ を証明する。

$$G'(N) = \frac{1}{(N+1)^2} - \frac{1}{N^2} e^{-\frac{1}{N}} = \frac{1}{(N+1)^2} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^2 e^{-\frac{1}{N}} \right\}$$

上式右辺の下線部分について、

$g(N) = 1 - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^2 e^{-\frac{1}{N}}$ とし、 $t = \frac{1}{N}$ とおけば ($0 < t < 1$)、

$$g(t) = 1 - (1+t)^2 e^{-t}$$

$$\therefore g'(t) = -e^{-t} (1-t^2) < 0 \quad (\because 0 < t < 1)$$

したがって、 $G'(N) < 0$ ($1 < N$)

また、 $G(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} > 0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} G(N) = 0$ より、 $G(N) > 0$ ($1 < N$)

$$\therefore \frac{1}{N+1} < \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \{1 - (1-R)^x\} = P$$

が証明された。

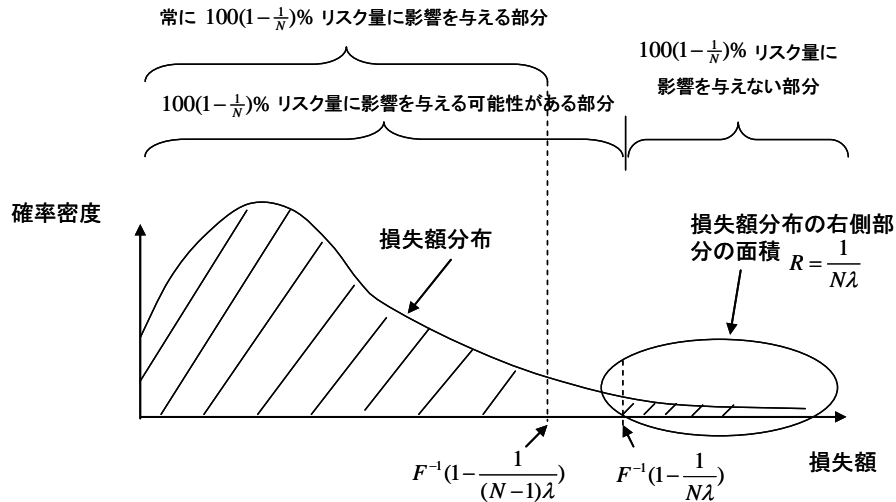
以上、(i)、(ii)により、 $\frac{1}{N+1} < P < \frac{1}{N}$ ($1 < N$) が証明された。 ■

③信頼区間と、リスク量に影響を与える損失額分布の範囲の関係

このような「信頼区間」と「高額損失データに求められる発生頻度の関係」は、①および②の例のような特殊な場合（2種類の損失額のみを仮定したノンパラメトリック手法）のみに限定されるものではなく、一般に損失分布手法に当てはまるものである。すなわち、信頼区間 $(1 - \frac{1}{N}) \times 100\%$ で年間ベースのリスクを計量する場合には、損失額分布において、少なくとも下から $(1 - \frac{1}{(N-1)\lambda}) \times 100\%$ 点まで正確に見積もることが必要で、上から数えて

$\frac{1}{N\lambda} \times 100\%$ 点まではリスク量に影響を与えないと言える（【図表B】参照）^{41,42}。

【図表 B】リスク量に影響を与える損失額分布の範囲（イメージ図）



(2) 解析的近似解によるオペリスクの計量

前項では、信頼区間、損失発生頻度との関係から、リスク量を算出する際に影響を与える損失額分布の範囲を特定したが、類似の考え方で、損失額分布のある1点（1個の損失額）でリスク量を近似する方法が研究されている（Böcker and Klüppelberg [2005]）。本論文によれば、損失額分布の分布関数がサブエクスポネンシャル性を満たす⁴³とき、信頼区間 $100\alpha\%$ 、年間平均

⁴¹ 2種類の損失額のみを仮定した①および②の例と同様、「高額損失（【図表B】における損失額分布の右側部分<上から $\frac{1}{N\lambda}$ の部分>）が少なくとも1個含まれる場合の年間総損失額が、高額損失を1個も含まない場合の年間総損失額より小さくなる確率」が十分小さい場合、こうした評価が可能となる。

⁴² もっとも、パラメトリック手法の場合、リスク量に影響を与える損失額分布の範囲が特定されたとしても、損失額分布のパラメータ推定を行うために必要なデータがその範囲に限定されるわけではなく、それより高額の高額損失データも使用して、パラメータ推定することが必要である。

⁴³ 分布関数がサブエクスポネンシャル性を満たすとは、分布関数 $F(\cdot)$ およびその n 重たみ込み $F(\cdot)^{n*}$ が、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x)^{n*}}{1 - F(x)} = n, \quad n \geq 2 \quad \text{ここで、} 1 - F(x)^{n*} = \Pr\left(\sum_{i=1}^n X_i > x\right)$$

を満たすことをいう。すなわち、 x が十分大きいとき、「総損失額（リスク量）の値が x を超える確率（同一の損失額分布から独立に n 回抽出した際の損失額の合計値が x を超える確

損失発生件数 λ のリスク量 $VaR(\alpha)$ は、損失額分布の分布関数 F を用いて、

$$VaR(\alpha) = F^{-1}\left(1 - \frac{1-\alpha}{\lambda}\right)$$

で近似できることが示されている。ここで、 $N = \frac{1}{1-\alpha}$ とおけば、上式は

$$VaR(\alpha) = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{N\lambda}\right)$$

となる。これは、 N を高額損失の発生頻度の逆数とすれば（すなわち、(1)で定めたように高額損失が N 年に1回発生するとすれば）、リスク量が、損失額分布の上から $\frac{1}{N\lambda}$ の分位点における損失額で推定できること、たとえば、99%、99.9%信頼区間でリスク量を近似計算する場合、各々（ノンパラメトリックな分布を仮定した場合の）100年に1回、1,000年に1回発生するような損失事象の損失額のみで推定できることを示している。

このように、同論文は、信頼区間が十分大きく、また、損失額分布がサブエクスポネンシャル性を満たす場合には、(1)で示した「リスク量に影響を与える損失額分布の範囲」の上限値そのものが、リスク量の近似解とみなせることを主張している。

これは、シミュレーションによるリスク量推定においても、信頼区間が十分大きく、損失額分布がサブエクスポネンシャル性を満たす場合には、テール部分（とくに、上記上限値の周辺部分）が推定結果に大きな影響を与え、極めて重要である（一方、それ以外の部分の影響度は小さい）ことを示唆している。

(3) 解析的近似解とシミュレーション結果の比較

最後に、Böcker and Klüppelberg [2005]が提案した解析的近似解で求めたリスク量の近似精度を、本稿でシミュレーションにより算出したリスク量を基準として評価すると（次頁の【図表 C】を参照）、以下の点が確認できる。

まず、一般に、同一の分布形を仮定した場合、算出されるリスク量が高額

率)」は、「その損失額分布から1回抽出した損失額が x を超える確率」の n 倍で近似できることをいう。詳細は、Embrechts *et al.* [1997]を参照。

なお、本稿で損失額分布のパラメトリックな分布形として採用した対数正規分布、ワイブル分布、一般化パレート分布（形状パラメータ ξ が正の場合）はいずれもサブエクスポネンシャル性を満たしている。

になるに従い、解析的近似解の精度が良くなる(乖離率が小さくなる)傾向にある。これは、推定された分布のファットテール性が相対的に強い場合、VaRの近似式の精度が高く、ファットテール性が相対的に弱い場合、VaRの近似式の精度が低くなる⁴⁴ためと考えられる。

また、全ての場合において、解析的近似解はシミュレーション結果よりも小さい値となっており、解析的近似解は推定された損失額分布から算出されるべきリスク量に対して過小なリスク量となっている可能性がある。

このように、解析的近似解は推定された分布のファットテール性が相対的に弱い場合、近似精度が悪化すること、また、同近似解は過小なリスク量となっている可能性があることが分かる。以上の点を踏まえると、解析的近似解を利用する際には、十分な近似精度が確保できていることを確認した上で、オペリスク量として用いることが妥当であると考えられる。

44 解析的近似解を用いる場合、計算される総損失額の値(x)において、脚注 43 で示した以下の近似式が成立していることが前提となる。

$$\frac{1-F(x)^{n^*}}{1-F(x)} = n, n \geq 2$$

脚注 43 のとおり、本稿で用いた損失額分布の推定に用いたパラメトリックな分布形は、いずれもサブエクスポネンシャル性を満たしており、 $x \rightarrow \infty$ のとき上記の近似式が成立することは保証されているが、総損失額の値 x の周辺で成立することが保証されているわけではない。

すなわち、「総損失額(リスク量)の値が x を超える確率(同一の損失額分布から独立に n 回抽出した際の損失額の合計値が x を超える確率)」が、「その損失額分布から 1 回抽出した損失額が x を超える確率」の n 倍で近似できなくなる可能性、例えば、「損失額分布から抽出した n 個の損失額が全て x 以下であるにも拘らず、総損失額(リスク量)が x を超える確率」が無視できなくなる可能性がある。

こうした可能性は総損失額(リスク量)が相対的に低額の場合(推定された損失額分布のファットテール性が相対的に弱い場合)、より高くなると考えられる。従って、ファットテール性が相対的に弱い場合、解析的近似解の精度が低下すると考えられる。

【図表 C】シミュレーション結果と解析的近似解との比較

分布形	パラメータ 推定手法	解析的近似解 ⁴⁵		シミュレーション結果 (本文【図表3】 参照)		乖離率 ⁴⁶		分布 パラメータ	
		信頼区間						尺度	形状
		99.0%	99.9%	99.0%	99.9%	99.0%	99.9%		
対数正規 分布	モーメント法	62.0	243.8	74.9	272.6	-17.3%	-10.6%	2.17	2.47
	最尤法	1.3	3.2	2.5	4.4	-47.4%	-27.0%	1.48	1.61
	最小2乗法	0.8	1.8	1.8	2.8	-55.1%	-35.4%	1.48	1.47
ワイブル 分布	モーメント法	92.2	321.5	105.8	351.7	-12.9%	-8.6%	0.70	0.18
	最尤法	1.5	2.5	3.9	5.0	-62.1%	-49.4%	10.85	0.43
	最小2乗法	0.3	0.4	1.6	1.8	-81.5%	-76.8%	10.90	0.63
一般化 パレート 分布	確率ウェイト モーメント法	24.6	232.1	26.8	255.4	-8.5%	-9.1%	4.57	0.98
	最尤法	50.1	630.4	54.1	686.1	-7.5%	-8.1%	3.44	1.10
	最小2乗法	1.1	4.5	1.8	5.5	-37.3%	-17.8%	3.84	0.60

45 ノンパラメトリック手法を用いて信頼区間 99%で計算したリスク量を 100 として、スケールリングした値を示す。

46 解析的近似解の、シミュレーション結果に対する乖離率、すなわち、

$$\frac{\text{解析的近似解} - \text{シミュレーション結果}}{\text{シミュレーション結果}}$$

を示す。

【補論 2】本稿で用いられる技術的な用語、論点について

(1) 本稿で損失額分布として使用する分布形とその特徴点

	特徴・形状	確率密度関数	パラメータ
対数正規分布	損失額 x の自然対数値が正規分布となる分布（ Y が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、 $x = e^Y$ の確率分布）である。 $x > 0$ の範囲で定義され、 x の正の方向に裾が広い形状となる。	$f_{LN}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right),$ $x > 0$	μ : x の自然対数値の平均（尺度パラメータ） σ : x の自然対数値の標準偏差（形状パラメータ ⁴⁷ ）
ワイブル分布	$x > 0$ の範囲で定義され、右記のパラメータ p が 1 より小さいとき、 x の正の方向に裾が広い形状となる。	$f_w(x) = \frac{p}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{p-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^p\right),$ $x > 0, p, \theta > 0$	p : 形状パラメータ θ : 尺度パラメータ
一般化パレート分布 (GPD ... Generalized Pareto Distribution)	$x > 0$ の範囲で定義され、 x の正の方向に裾が広い形状となる。	$f_{GPD}(x) = \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\xi}{\beta} x\right)^{-\frac{1}{\xi}-1},$ $x \geq 0, \xi \neq 0, \beta > 0$ $f_{GPD}(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right),$ $x \geq 0, \xi = 0, \beta > 0$	ξ : 形状パラメータ（ ξ が大きいほど分布の裾が厚い） β : 尺度パラメータ

一般化パレート分布には、 ξ の範囲によって、① $\xi < 0$ のとき、損失額が一定値を超える確率が 0 となる、② $\xi > \frac{1}{r}$ のとき、分布の r 次モーメントが存在しない、といった性質がある。とくに $\xi > 1$ の場合には、1 次モーメントである平均値が存在しない、非常に裾の厚い分布が推定されることとなる。

47 データのスケール変換（全データを、ゼロ以外の数により定数倍する）によって、値が不変なパラメータを表す。

(2) パラメータ推定手法とその特徴点

	考え方	手法	特徴
モーメント法	モーメント（平均、分散等に関するパラメータ）について満たすべき連立方程式を作成し、その解を求め、パラメータの推定値とする方法。	<p>実損データから、1次、2次のモーメント</p> $M_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, M_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$ <p>を計算し、M_1、M_2と各分布のパラメータとの関係式（仮定する分布形によって異なる）を解くことにより各分布のパラメータを求める。</p>	モーメントの計算において、相対的に x が大きい（低頻度高額損失）部分、すなわち分布のテール部分が強調される傾向がみられる。
確率ウェイトモーメント法	パラメータの値によっては平均、分散等のモーメントが存在しなくなることもあるような、特に裾が広い分布に対して、各標本の重み付け（データの値が大きくなるほど重み付けを小さくする）を行い、モーメントを算定する方法。	<p>実損データから、変形されたモーメント</p> $w_r = E[X(1 - F(X))^r] \quad (r = 0, 1, \dots)$ <p>$F(X)$：分布関数</p> <p>を計算し、各分布のパラメータとの関係式（仮定する分布形によって異なる）を解くことにより各分布のパラメータを求める。</p>	一般化パレート分布等、特に裾が厚い分布において、モーメント法の代わりに用いられる。
最尤法	<p>尤度（標本を構成する各実損データの発生確率密度の積で表現）を最大化するようにパラメータを決定する。具体的には、</p> <p>① 仮定する分布形の確率密度関数に実損データを代入し、パラメータについての関数を得る。</p> <p>② 上記①で得た値（関数）の積をとり尤度関数を得る。</p> <p>③ 尤度関数の値を最大にするようにパラメータを決定する。</p>	<p>実損データから、対数尤度関数</p> $\Lambda = \log \prod_{i=1}^N f(x_i, \theta_1, \dots, \theta_K)$ $= \sum_{i=1}^N \log(f(x_i, \theta_1, \dots, \theta_K))$ <p>を計算し、</p> $\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, \dots, K$ <p>を解いて、パラメータθ_jを求める。</p> <p>対数正規分布の場合、2つのパラメータθ_1, θ_2は各々、実損データの対数値の標本平均、標本分散となる。</p>	<p>対数尤度関数の計算において、相対的にデータ数が多い高頻度低額損失部分が強調されるため、この部分におけるフィットを重視したパラメータが推定される傾向がみられる。</p> <p>最尤推定量は、一般的に漸近的有効推定量（サンプル数$n \rightarrow \infty$の時に推定量の分散が最小となる）。</p>
最小2乗法	実損データと推計値（推定する分布関数上の点）との差の2乗の和を求め、その値が最小になるようにパラメータの値を決定する方法。	<p>実損データと推計値が線形の関係になるように変換したデータの組合せ(y_i, x_i)について、</p> $\sum \{y_i - (ax_i + b)\}^2$ <p>が最小となるようにパラメータを決定する。例えば、損失額分布として対数正規分布を仮定した場合、y_i：実損データの対数値の単調増加列、x_i：実損データの対数値が標準正規分布に完全に従う場合の単調増加列、となる。</p>	最尤法と同様に、相対的にデータ数が多い高頻度低額損失部分が強調される傾向がみられる。

(3)分布形の適合に関する視覚的検証方法(PPプロット、QQプロット)

名称	考え方	損失分布の適合度検証に用いる際のポイント
PPプロット (パーセンタイル・パーセンタイル・プロット)	推定された分布と実損データの分布について、各データの確率点(低額から数えて何%目の位置にあるか、0~1の範囲で表示したもの)における乖離状況を表示する(x軸:推定された分布上の推計値、y軸:実損データに基づく値)。	45度線に近いほど適合度が高い。また、実損データの過大評価、過小評価を視覚的に確認することも可能である(45度線より上方にある点においては、実損データを過小評価、下方にある点においては過大評価)。
QQプロット (クォンタイル・クォンタイル・プロット)	推定された分布と実損データの分布について、各損失額の乖離状況を見やすさを考慮し適宜変換・スケールリングを行い表示するものである(x軸:推定された分布上の推計値、y軸:実損データに基づく値)。	PPプロットでは、高額損失部分における実損データの分布と推定された分布の乖離幅が視覚的に見づらいがQQプロットでは軸を損失額ベースに変換しており、高額損失部分の乖離幅が視覚的に判断しやすくなっている。

(4) 損失額分布の適合度検証における定量的手法とその評価

名称	考え方	本稿で用いた手法	損失額分布の適合度検証に用いることが難しい背景
コルモゴロフ-スミルノフ統計量 (K-S 統計量)	実損データの各点において、①実損データの分布と②推定された分布の分布関数の差(の絶対値)を計算し、最大値を統計量とする。	$K = \max_{1 \leq i \leq N} S_N(x_i) - F(x_i) $ $K : \text{K-S 統計量}$ $S_N(x_i) : \text{実損データ等による実損データの分布の分布関数 (データを昇順に並べた際のパーセント点)}$ $F(x_i) : \text{推定される分布の分布関数}$ $N : \text{データ数}$ $x_i : \text{各データの値}$	相対的に、高頻度低額損失部分の乖離幅が重視される(低頻度高額損失部分における乖離幅は、両分布とも分布関数の値が1に近いので然程大きくならないため)。このため、リスク量に大きな影響を与える損失額分布の低頻度高額損失部分の乖離幅を適切に評価することは難しい。
アンダーソン-ダーリング統計量 (A-D 統計量)	K-S 統計量の修正版で、実損データの分布関数と推計分布の分布関数の差の2乗に重み付け関数 $\psi(x)$ を掛けたものの和を統計量とする。	$A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_N(x) - F(x) ^2 \psi(x) dF(x),$ $\psi(x) = \frac{N}{F(x)(1-F(x))}$ $A^2 : \text{A-D 統計量}$ $N : \text{データ数}$	分布の左右のテール部分(分布の左端、および右端部分)における乖離幅に敏感に反応する統計量と、一般的に評価されている(重み付け関数 $\psi(x)$ により、分布の左右のテール部分に高い重みが付与されるため)。しかし、K-S 統計量と同様に、(低頻度高額損失部分における乖離幅は、両分布とも分布関数の値が1に近いので然程大きくならないため)左側のテール部分、すなわち非常に高頻度低額損失部分における分布関数の乖離幅が統計量として採用される結果となり、低頻度高額損失部分の乖離幅を適切に評価することは難しい。

参考文献

三菱信託銀行オペレーショナル・リスク研究会、「オペレーショナル・リスクのすべて」、東洋経済新報社、2002年

オペレーショナルリスク管理高度化勉強会、『オペレーショナルリスク管理の更なる高度化に関する議論（1）——「オペレーショナルリスク管理高度化勉強会」における議論の要約』、2006年6月
(http://www.boj.or.jp/type/release/zuiji_new/fsc0606a.pdf で入手可能)

森本祐司、「金融と保険の融合について」、『金融研究』、第19巻別冊第1号、日本銀行金融研究所、2000年4月

Böcker, C. and C. Klüppelberg, “Operational VaR: A Closed-Form Approximation,” *Risk*, 18(12) pp. 90—93, 2005

Chapelle, A., Y. Crama, G. Hübner, and J. Peters, “Basel II and Operational Risk: Implications for risk measurement and management in the financial sector,” National Bank of Belgium, 2004.
(<http://www.nbb.be/doc/ts/publications/WP/WP51En.pdf> で入手可能)

de Fontnouvelle, P., V. DeJesus-Rueff, J. Jordan, and E. Rosengren, “Capital and Risk : New Evidence on Implications of Large Operational Losses,” Federal Reserve Bank of Boston, 2003.
(<http://www.bos.frb.org/economic/wp/wp2003/wp035.pdf> で入手可能)

de Fontnouvelle, P., J. Jordan, and E. Rosengren, “Implications of Alternative Operational Risk Modeling Techniques,” NBER Working Paper No. W11103, 2004.
(<http://www.algorithmics.com/solutions/opvantage/docs/OpRiskModelingTechniques.pdf> で入手可能)

Dutta, K. and J. Perry, “A Tale of Tails: An Empirical Analysis of Loss Distribution Models for Estimating Operational Risk Capital,” Federal Reserve Bank of Boston, 2006.
(<http://www.bos.frb.org/economic/wp/wp2006/wp0613.pdf> で入手可能)

Embrechts, P., C. Klüppelberg, and T. Mikosch, *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1997.

Hoaglin, David C., “Summarizing Shape Numerically: The g-and-h Distributions,” in David C. Hoaglin, Frederick Mosteller, and John W. Tukey, eds., *Exploring Data Tables, Trends, and Shapes*, New York, NY: John Wiley & Sons, Inc., 1985, pp. 461–513.

Klugman, S., H. Panjer, and G. Willmot, *Loss Models: From Data to Decisions*, second edition, New York, NY: John Wiley & Sons, Inc., 2004.

Moscadelli, M., “The modeling of operational risk: experience with the analysis of the data collected by the Basel Committee,” the Bank of Italy, 2004.

(http://www.bancaditalia.it/ricerca/consultazioni/temidi/td04/td517/en_tema_517.pdf で入手可能)