ワークショップ「リスク計測手法のフロンティア」資料

与信ポートフォリオ解析の新手法

ー 数値的近似によるアプローチ ー

2008年7月25日
みずほ第一フィナンシャルテクノロジー（株）

本日の内容

Ⅰ. 「解析的手法」とは

Ⅱ. ラプラス逆変換法

Ⅲ. モーメント母関数の高速計算法

Ⅳ. 解析的手法のパフォーマンス

Ⅰ.「解析的手法」とは

Ⅰ.「解析的手法」とは

信用リスク計測技術の課題

- 「高速性」と「高精度」の両立
  - 一方を犠牲にすれば、他方を満たすことは容易
- リスク寄与度の算出方法の確立
  - 高精度にリスク寄与度を算出する方法は未確立
- マルチ・ファクターへの対応
  - モンテカルロ法以外でマルチ・ファクターを扱うことは困難

Ⅰ.「解析的手法」とは

信用リスク計測手法の整理

モンテカルロ法

- 長所： 時間をかければ高精度にリスク計測可能
  マルチ・ファクターでも適用可能
- 短所： 精度を高くするには実行時間がかかる
  リスク寄与度の算出が困難

近似解による方法（鞍点法、グラニュラリティ調整法）

- 長所：一般に計算時間は高速
  リスク寄与度算出への応用が可能
- 短所： 精度がポートフォリオに依存
  マルチ・ファクターへの適用が困難

Mizuho-DL Financial Technology

Ⅰ.「解析的手法」とは

- アプローチの選択
  - 前頁の手法の高度化には限界がある
  - モンテカルロ法では、リスク寄与度の算出を高速に行うことは困難
  - 近似解による方法では、精度が低下する状況が避けられない
    - 「どのような形状の損失額分布でも高い精度の近似式」は存在するか？

→ 我々が取ったアプローチ：「<u>数値的近似</u>」

Ⅰ. 「解析的手法」とは

- 「数値的近似」とは？
  - 数式に基づいた信用リスク計測手法
  - 計算過程の工夫により、高速に計測を行う
    - 計算過程で「離散化」による近似を行うことにより、計算量を大幅に減らすことに成功
  - VaRやCVaRのエクスポージャによる微分であるリスク寄与度も算出可能

→ **モンテカルロ法や近似解による方法とは根本的に異なるアプローチ**

Ⅰ.「解析的手法」とは

- 損失額分布の密度関数の表式
  - 密度関数は、モーメント母関数をラプラス逆変換することにより算出可能

$$f_L(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}\left(1-p_i(\vec{x})+p_i(\vec{x})e^{-\alpha E_i}\right)\phi(\vec{x})d\vec{x}\right\}d\alpha$$

モーメント母関数

ラプラス逆変換

Ⅰ．「解析的手法」とは

密度関数算出のポイント

<Point 1> モーメント母関数の計算方法

- 共通リスクファクターに関する（多次元）積分を高速かつ高精度に実行する必要がある。

<Point 2> ラプラス逆変換の計算方法

- 複素平面上の無限区間の積分を高速かつ高精度に実行する必要がある。

→ 「解析的手法」とは、<Point 1>及び<Point 2>の計算を高速かつ高精度に行う方法論

II. ラプラス逆変換法

Ⅱ. ラプラス逆変換法

- ラプラス逆変換法のアイディア
  - 解析的手法では、次の2つのステップでラプラス逆変換を実行

＜L－1＞
ラプラス逆変換の積分を無限級数の和で表示

＜L－2＞
収束加速法を用いて無限級数の和を算出

Ⅱ．ラプラス逆変換法

＜L－1＞ポアソン法①

- ポアソン法は、ラプラス逆変換の無限積分を無限級数によって近似する方法を与える。

$$f_L(t) \cong \frac{h}{2\pi}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp[(\gamma+ikh)t]\hat{f}_L(\gamma+ikh)\right]$$

$$=\frac{h}{\pi}\exp(\gamma t)\cdot\left[\frac{\hat{f}_L(\gamma)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left\{\hat{f}_L(\gamma+ikh)\exp[ikht]\right\}\right]$$

h ：積分区間の分割幅

→ **ポアソン法は、形式的には台形公式と同じ**

Ⅱ. ラプラス逆変換法

＜L－1＞ポアソン法②

- ポアソン法はしばしば高精度の近似となる
  - 分布関数にポアソン法を適用した場合の誤差

$$|err| \le 1 - F\left(\frac{2\pi}{h} - t\right) \quad , \quad (0 < t \le \frac{\pi}{h})$$

- 上記の誤差は、無限項を足しあげた場合のもの
- 現実には、計算を有限項で打ち切る必要があるが、級数の収束は非常に遅い

→ **収束加速法による収束改善の必要性**

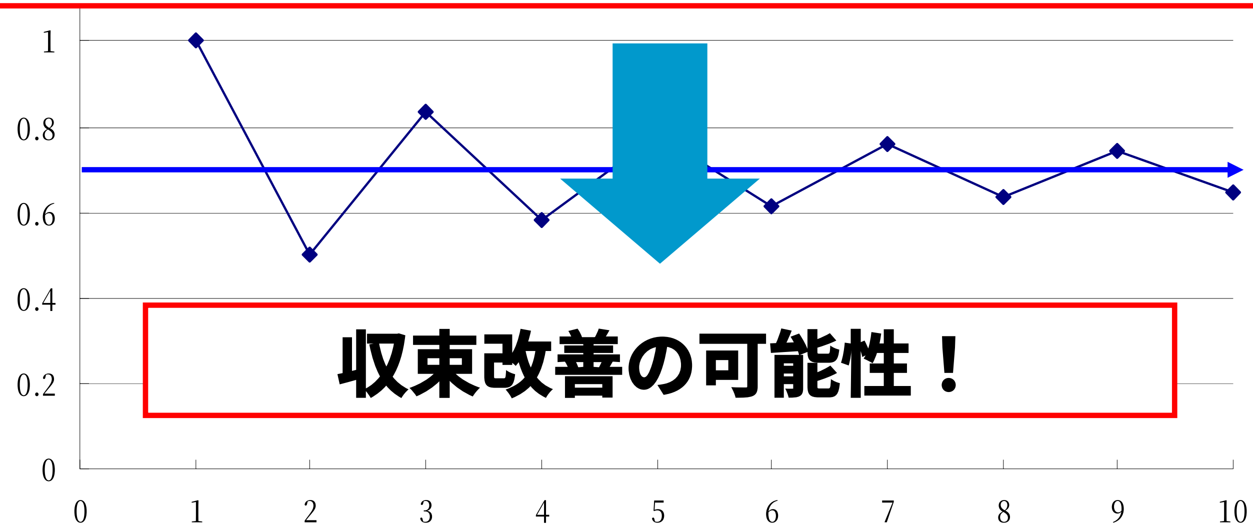
Ⅱ．ラプラス逆変換法

- 「収束加速」のイメージ

＜例： $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ ＞

- Ｓｎは非常に収束が遅い級数である。しかし・・・

最初の数項から、収束先がある程度推測できる。



Ⅱ. ラプラス逆変換法

- ＜L－2＞連分数とは
  - 解析的手法では、「連分数」の性質を用いて級数の和を高速に計算している。
  - 連分数の例：関数 arctan(x)の連分数表示

無限級数表示　：$$\arctan x = x\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2k+1}\right\}$$

連分数表示　：$$\arctan x = \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{(2x)^2}{5+\cdots}}}$$

Ⅱ．ラプラス逆変換法

- ＜L－2＞連分数の性質
  - 無限級数表示よりも連分数表示の方がはるかに収束が速い場合がある

＜例：円周率の数値計算＞

π＝4arctan(1)から、πの近似値を求める。

π＝<u>3.14159</u>36・・・（無限級数、<u>100万項</u>）

π＝<u>3.14159265358</u>98・・・（連分数、<u>18階層</u>）

II. ラプラス逆変換法

- ＜L－2＞ 連分数による収束加速
  - 無限級数の和を連分数に変換することができれば、収束の大幅な改善が見こまれる。

$$f_L(t) \cong \frac{h}{\pi}\exp(\gamma t)\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{Re}\left(c_k z^k\right)$$

$$= \frac{h}{\pi}\exp(\gamma t)[\cfrac{a_0}{1+\cfrac{a_1 z}{1+\cfrac{a_2 z}{1+\cdots}}}]$$

$\{c_0, c_1, \cdots\}$ が与えられたときに、$\{a_0, a_1, \cdots\}$ を求めたい

Ⅱ. ラプラス逆変換法

＜L－2＞ QDアルゴリズム

- QDアルゴリズムとは、無限級数の係数 $\{c_0, c_1, \cdots\}$ から連分数の係数 $\{a_0, a_1, \cdots\}$ を効率的に計算する方法

初期値： $e_0^{(i)} = 0$, $q_1^{(i)} = \dfrac{c_{i+1}}{c_i}$

漸化式： $e_k^{(i)} = e_{k-1}^{(i+1)} + q_k^{(i+1)} - q_k^{(i)}$, $q_{k+1}^{(i)} = \dfrac{q_k^{(i+1)} \cdot e_k^{(i+1)}}{e_k^{(i)}}$

出力値： $a_{2k} = -e_k^{(0)}$, $a_{2k-1} = -q_k^{(0)}$

Ⅱ. ラプラス逆変換法

＜L－2＞ 連分数による収束加速

- 連分数の性質をラプラス逆変換に応用することにより、高速に損失額密度関数を算出できる。

＜ポアソン法の結果（再掲）＞

$$f(t) \cong \frac{h}{\pi} \exp(\gamma t) \cdot \left[\frac{\hat{f}(\gamma)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{ \hat{f}(\gamma + ikh) \exp[ikht] \right\} \right]$$

$c_k = \hat{f}_L(\gamma + ikh)$, $z = \exp(iht)$ としてQDアルゴリズムを実行すれば、連分数に書き換えることが可能

II．ラプラス逆変換法

＜L－2＞損失額分布の算出

- 係数 $\{a_0, a_1, \cdots\}$ が求まると、任意の損失額に対する密度関数の値を算出できる。

$$f_L(t) \cong \frac{h}{\pi}\exp(\gamma t)[\frac{a_0}{1+\frac{a_1 z}{1+\cdots}}]$$

$$z = \exp(iht)$$

$\{a_0, a_1, \cdots\}$ が損失額tに依存しないため、分布全体を高速に算出する事ができる

Ⅱ．ラプラス逆変換法

ラプラス逆変換法のまとめ

- 解析的手法では、次の2つのステップで高速かつ高精度にラプラス逆変換を実行している。

＜L－1＞ポアソン法による無限級数化
⇒ ポアソン法は形式的には台形公式と同じ

＜L－2＞QD法による収束加速
⇒ QD法は連分数変換のためのアルゴリズム

III. モーメント母関数の高速計算法

III. モーメント母関数の高速計算法

企業価値モデル

- 解析的手法は「企業価値モデル」による信用リスク計測に適用可能

$$Z_i = \sum_{j=1}^{N_F} \alpha_{ij} X_j + \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{N_F} \alpha_{ij}^2}\, \varepsilon_i$$

企業価値　感応度係数　共通リスクファクター　個別因子

- 共通リスクファクターの値が決まった下では、不確実性の源は個別因子のみ

⇒条件付独立の性質

II．モーメント母関数の計算法

- 感応度係数に対する仮定
  - 実務では、感応度係数はセクターごとに推定されることが多い

$$\alpha_{ij} = \alpha_{S(i)j} \quad (S(i): \text{企業}\, i\, \text{のセクター})$$

  - このとき、企業価値は次のようになる

$$Z_i = \beta_{S(i)} \tilde{Y}^{S(i)} + \sqrt{1 - \beta_{S(i)}{}^2}\, \tilde{\varepsilon}_i$$

$$\beta_{S(i)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \alpha_{S(i)j}{}^2}, \quad \tilde{Y}^{S(i)} = \frac{1}{\beta_{S(i)}} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{S(i)j} \tilde{X}_j \quad (\tilde{Y}^{S(i)}: \text{セクター因子})$$

⇒ 1ファクター分解可能

III. モーメント母関数の高速計算法

企業価値モデルの特徴

条件付独立

- リスクファクターの値が決まった下では、デフォルトは独立に発生

1ファクター分解可能

- セクターごとに見れば、企業価値は1ファクターで記述可能

⇒ これらの性質が、高速計算の鍵に

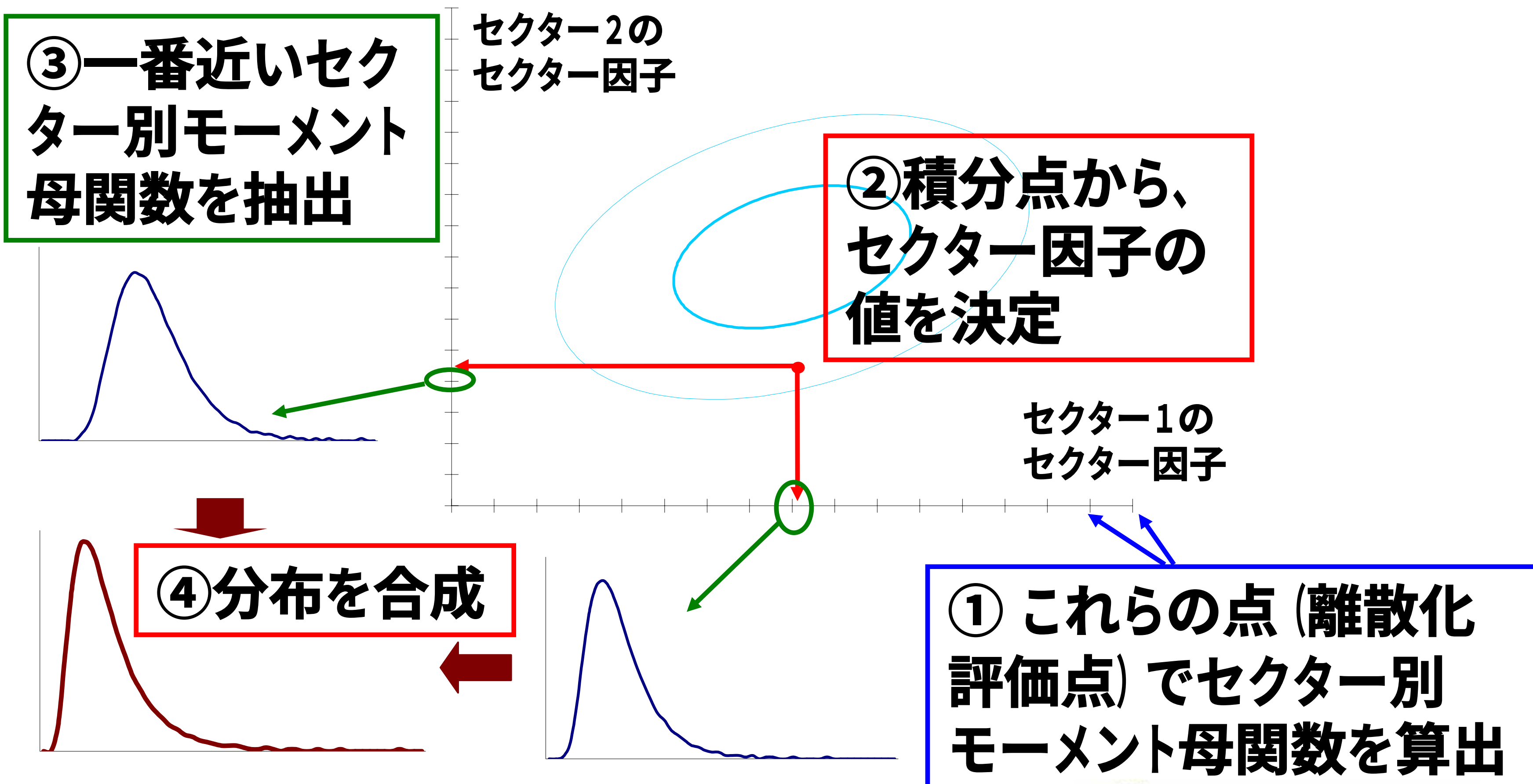
III. モーメント母関数の高速計算法

- モーメント母関数の高速計算のアイディア
  - モーメント母関数の計算は債務者数回のループが必要であり、時間がかかる
    ⇒　この計算は、セクター毎に1次元で実行
  - 相関構造は、セクター間で記述されている
    ⇒　相関の反映は、高次元で実施する必要

⇒ **周辺分布の計算と相関反映の計算を分離する**

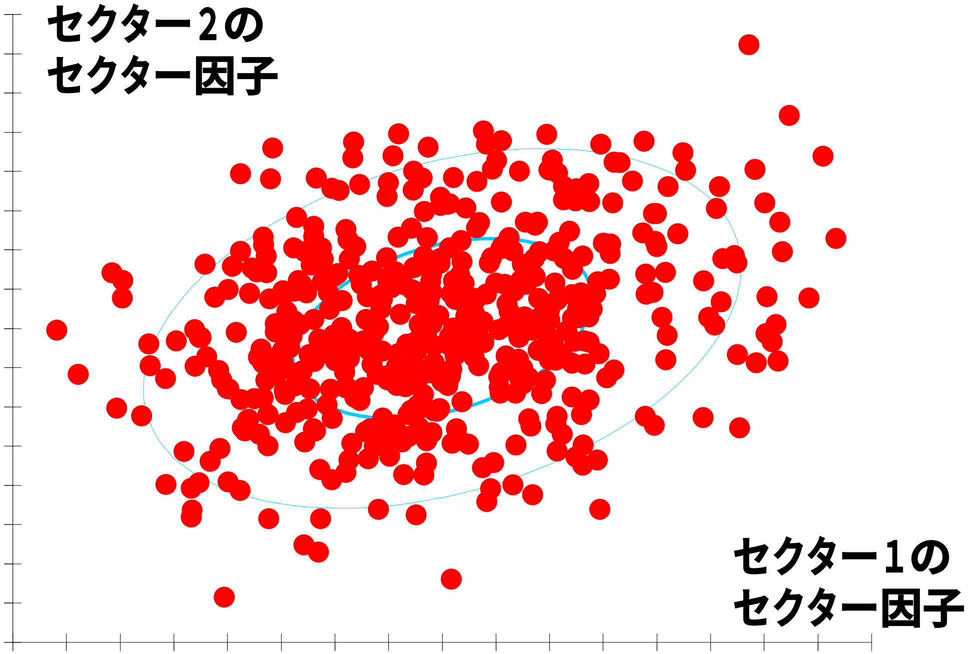
III. モーメント母関数の高速計算法

モーメント母関数の高速計算のイメージ



III. モーメント母関数の高速計算法

モーメント母関数の高速計算のイメージ（2）



⑤すべての積分点に対して、②～④を実施する。

III. モーメント母関数の高速計算法

- 高速計算法の計算速度
  - 単純な方法でモーメント母関数を算出するために必要な計算量は次のとおり

計算量＝（債務者数）×（積分点の数）

  - 高速計算法での計算量は次のようになる

計算量＝（債務者数）×（離散化評価点の数）
＋（積分点の数）×（セクター数）

→ 高速計算法では、計算量が大幅に削減可能

III. モーメント母関数の高速計算法

- 高速計算法の精度
  - 高速計算法では、ステップ③で離散化したセクター因子の値を用いるという近似を行っている
  - この近似による誤差は制御可能であり、離散化評価点を増やせば小さくすることができる
  - 離散化評価点の数を100程度にすれば、十分に高精度となることを検証済み

⇒ **高精度にモーメント母関数を算出可能**

Ⅳ. 解析的手法のパフォーマンス

IV. 解析的手法のパフォーマンス

パフォーマンス計測の前提

検証に用いたサンプル・ポートフォリオ

債務者数	1,000社、1万社、100万社
Exposureの分布	均一 (均一ポートフォリオ) 冪乗則 (集中ポートフォリオ)
セクター数	33セクター
格付数	19格付

PCスペック

- CPU : Core(TM)2 Duo 2.66GHz, Memory : 3.12GB
  ⇒ 通常のDeskTop PC

※ 詳細な計測条件については、論文"A Novel Methodology for Credit Portfolio Analysis" 参照

Ⅳ. 解析的手法のパフォーマンス

解析的手法によるリスク計測時間

- 下の表は、解析的手法でのリスク計測時間をまとめたもの

■ 表1・解析的手法による計算時間（論文より抜粋）

債務者数	リスク量の算出	全債務者のリスク寄与度算出
1,000件	40秒	2分43秒
1万件	42秒	2分51秒
100万件	3分45秒	17分43秒

IV. 解析的手法のパフォーマンス

解析的手法によるリスク計測精度

- 下の表は、解析的手法のリスク計測精度の検証結果をまとめたもの

■ 表2・解析的手法のリスク計測精度（論文より抜粋）

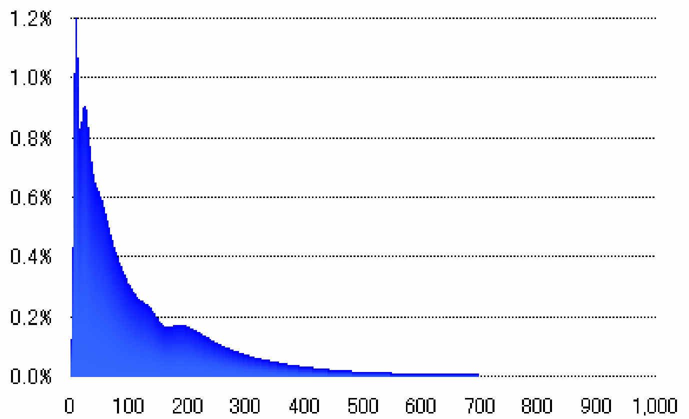
指標	信頼率	1000万回モンテカルロとの乖離率	
		分散ポートフォリオ	集中ポートフォリオ
VaR	99.00%	0.32%	0.22%
	99.90%	0.31%	0.02%
	99.97%	-0.22%	-0.22%
CVaR	99.00%	0.30%	0.17%
	99.90%	-0.21%	-0.27%
	99.97%	-0.78%	-0.48%

※ ポートフォリオの債務者数は、いずれも100万件

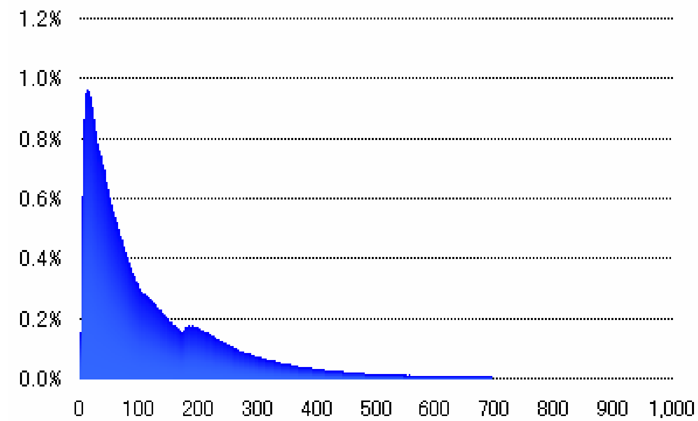
Ⅳ. 解析的手法のパフォーマンス

<参考>損失額分布の比較

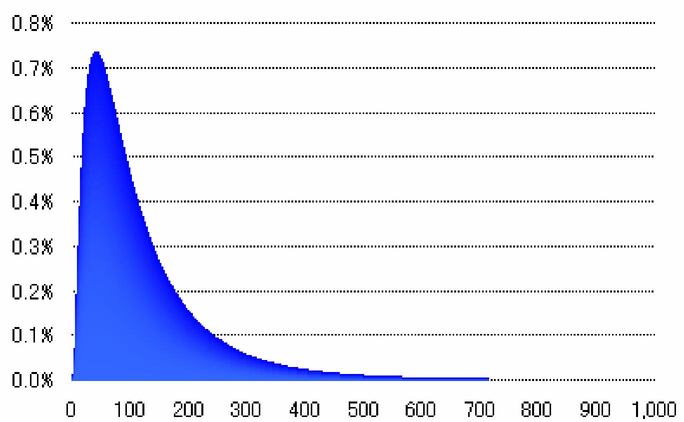
■ 解析的手法・集中ポートフォリオ（債務者数1万件）



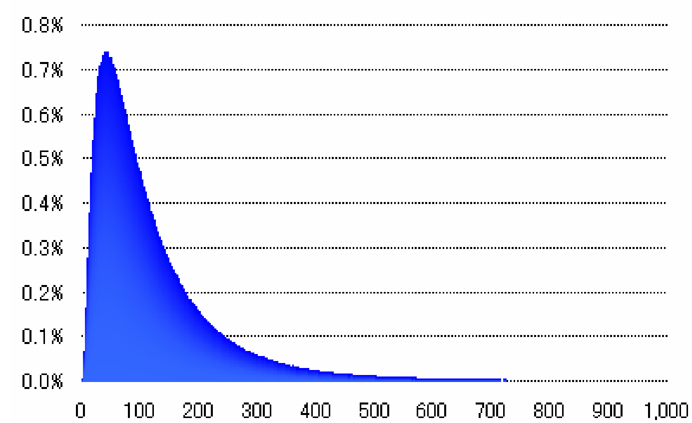
■ モンテカルロ・集中ポートフォリオ（債務者数1万件）



■ 解析的手法・均一ポートフォリオ（債務者数1万件）



■ モンテカルロ・均一ポートフォリオ（債務者数1万件）



ご清聴ありがとうございました。