分布展開法の市場リスク計測への応用

丸茂 幸平*
日本銀行 金融機構局

25 July 2008

*kouhei.marumo@boj.or.jp

本日の概要

▻本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
正規直交多項式系と分布展開法
分布展開法の市場リスク計測への応用
多変量の分布展開法
今後の課題・論点など

日銀ワーキングペーパー「分布展開法の市場リスク計測への応用」の説明[1]

i. **市場リスク計測とその技術的な側面**
ii. **正規直交多項式系と分布展開法**
   - **分布展開法を応用する上での工夫**
iii. **分布展開法の市場リスク計測への応用**
iv. **多変量の分布展開法**
v. **今後の課題・論点など**

[1] Marumo (2007) 及び Marumo and Wolff (2007) の内容にも適宜触れる。なお、本報告の中で示された内容や意見は、日本銀行の公式見解を示すものではありません。

➢本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

➢市場リスク計測と損益分布

➢ポートフォリオの損益分布の算出手順

➢本研究で扱う問題

➢現在一般的な手法

➢現在一般的な手法 — 多変量正規分布の利用

➢現在一般的な手法 — HS 法

➢現在一般的な手法 — その他の手法

正規直交多項式系と分布展開法

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

今後の課題・論点など

市場リスク計測とその技術的な側面

- 本日の概要
- 市場リスク計測とその技術的な側面
- 市場リスク計測と損益分布
- ポートフォリオの損益分布の算出手順
- 本研究で扱う問題
- 現在一般的な手法
- 現在一般的な手法 — 多変量正規分布の利用
- 現在一般的な手法 — HS 法
- 現在一般的な手法 — その他の手法
- 正規直交多項式系と分布展開法
- 分布展開法の市場リスク計測への応用
- 多変量の分布展開法
- 今後の課題・論点など

VaR, ES などのリスク指標は、ポートフォリオの損益分布の統計量として与えられる

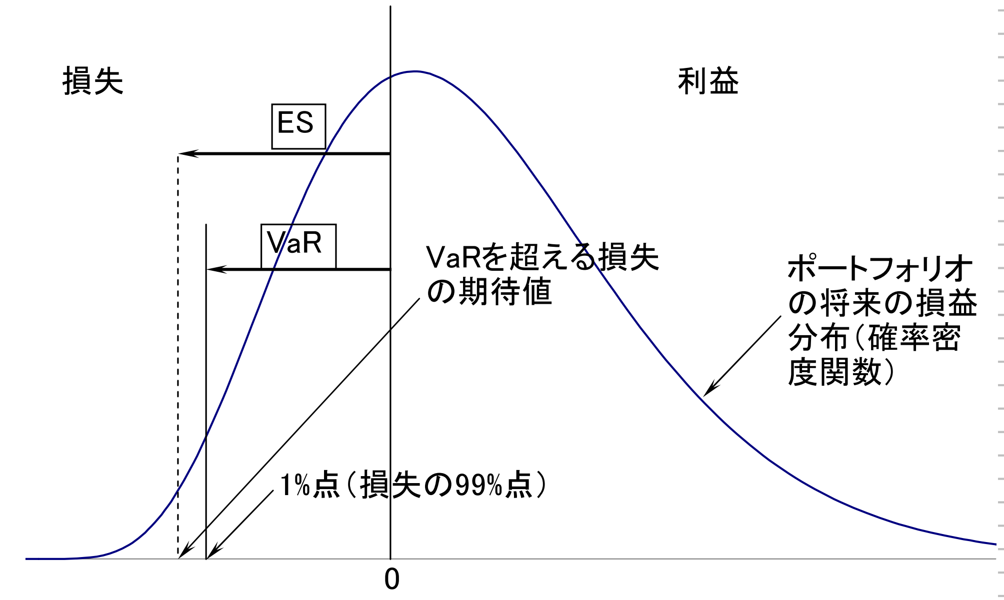

Figure 1: **市場リスクとポートフォリオの損益分布**

- $\mathrm{VaR}_\alpha = \max\{-\inf\{z|P(Z \le z) \ge \alpha\}, 0\}$
- $\mathrm{ES}_\alpha = -\mathrm{E}(Z|Z \le -VaR_\alpha)$

ポートフォリオの損益分布の算出手順

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

▻市場リスク計測と損益分布

▻ポートフォリオの損益分布の算出手順

▻本研究で扱う問題

▻現在一般的な手法

▻現在一般的な手法 — 多変量正規分布の利用

▻現在一般的な手法 — HS 法

▻現在一般的な手法 — その他の手法

正規直交多項式系と分布展開法

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

今後の課題・論点など

1. **リスク評価期間 T の設定**
2. **リスク・ファクター $\boldsymbol{x}$ 及びリンク関数 d の特定**
   - $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p)$: **損益に影響を与え得る市場変数**
   - $z = d(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow$ **損益 z はリスク・ファクター $\boldsymbol{x}$ に依存**
3. **リスク・ファクターのモデル化及びパラメータ推定**
   - $\boldsymbol{x}$ **を p 変量の確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_p)$ でモデル化**
   - **分布関数 $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_p \leq x_p)$ に含まれるパラメータを過去の市場情報などから推定**
4. **ポートフォリオの損益分布の導出**
   - **損益を表わす確率変数**: $Z = d(\boldsymbol{X})$
   - **損益分布関数 $F_Z(z) = P(Z \leq z)$ は $F_{\boldsymbol{X}}(\cdot)$ と $d(\cdot)$ によって決まる**

本研究で扱う問題

▻本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
▻市場リスク計測と損益分布
▻ポートフォリオの損益分布の算出手順
▻本研究で扱う問題
▻現在一般的な手法
▻現在一般的な手法 — 多変量正規分布の利用
▻現在一般的な手法 — HS 法
▻現在一般的な手法 — その他の手法
正規直交多項式系と分布展開法
分布展開法の市場リスク計測への応用
多変量の分布展開法
今後の課題・論点など

- ポートフォリオの損益分布は、形式的には、

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \int_{d(\boldsymbol{x}) \leq z} \mathrm{d}F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

  によって求められるが、この計算は一般に容易でない

- 本稿では、この問題に対処するために、問題を 3 つに分けて、分布展開法の応用を試みる
  - X の分布 F_X の特徴をどのように捕捉・要約するか
  - 特に、リスク評価期間 T が長い場合に分布の特徴をどのように扱うか
  - X の分布の特徴に関する情報が与えられたとして、(1) 式をどのように計算するか

— リスク・ファクター X をどのようにモデル化するか、という問題には立ち入らない

現在一般的な手法

▻本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
▻市場リスク計測と損益分布
▻ポートフォリオの損益分布の算出手順
▻本研究で扱う問題
▻現在一般的な手法
▻現在一般的な手法 — 多変量正規分布の利用
▻現在一般的な手法 — HS 法
▻現在一般的な手法 — その他の手法
正規直交多項式系と分布展開法
分布展開法の市場リスク計測への応用
多変量の分布展開法
今後の課題・論点など

- **多変量正規分布を利用する手法**
  - **多変量正規分布を使ってリスク・ファクターをモデル化**
  - Stochastic volatility (SV) models, Jump diffusion models **等のバリエーションが存在**
- **ヒストリカル・シミュレーション** (HS) **法**
  - **リスク・ファクターの経験分布を利用**
- **その他の手法**
  - **極値論に基づき、一般化パレート分布で分布の裾を表現する方法**
  - **リスク・ファクター間の依存関係をコピュラを使って表現する方法**
  - **多変量 t 分布のほか、安定分布族、一般化誤差分布、混合正規分布などを利用してリスク・ファクターをモデル化**

現在一般的な手法 — 多変量正規分布の利用

▻本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
▻市場リスク計測と損益分布
▻ポートフォリオの損益分布の算出手順
▻本研究で扱う問題
▻現在一般的な手法
▻現在一般的な手法 — 多変量正規分布の利用
▻現在一般的な手法 — HS 法
▻現在一般的な手法 — その他の手法
正規直交多項式系と分布展開法
分布展開法の市場リスク計測への応用
多変量の分布展開法
今後の課題・論点など

- **X の分布の特徴の捕捉・要約**
  - $(+)$ **平均ベクトル、分散共分散行列に要約**
  - $(-)$ **左右の非対称性や、重い裾、非線形な依存関係を無視**
- **長期間のリスク計測**
  - $(+)$ **系列独立の仮定のもとで所謂 $\sqrt{T}$ 則が整合的**
  - $(+)$ SV **モデルなどは** 2 **次積率の系列依存関係を捕捉可能**
- (1) **式の積分計算** $\left(\int_{d(\boldsymbol{x})\leq z} \mathrm{d}F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\right)$
  - $(+)$ d **が線形ならば** $Z = d(X)$ **も正規分布**
  - $(-)$ **一般的には** MC **法などに頼る必要**

現在一般的な手法 — HS 法

▻本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
▻市場リスク計測と損益分布
▻ポートフォリオの損益分布の算出手順
▻本研究で扱う問題
▻現在一般的な手法
▻現在一般的な手法 — 多変量正規分布の利用
▻現在一般的な手法 — HS 法
▻現在一般的な手法 — その他の手法
正規直交多項式系と分布展開法
分布展開法の市場リスク計測への応用
多変量の分布展開法
今後の課題・論点など

- **X の分布の特徴の捕捉・要約**
  - (+) **経験分布を利用するので、左右の非対称性や、重い裾、非線形な依存関係など、観測された特徴を自然に捕捉**
- **長期間のリスク計測**
  - (−) **合理的な対処法は提案されていない**
    - ◆ **重なりを許した標本を利用したり、$\sqrt{T}$ 則を当てはめるなど便宜的な対処のみ**
- **(1) 式の積分計算** $\left(\int_{d(\boldsymbol{x})\leq z} \mathrm{d}F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\right)$
  - (+) **計算の困難さが d の形状によらない**
- **その他**
  - (−) **市場モデルの組み込みが困難**

現在一般的な手法 — その他の手法

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

▻市場リスク計測と損益分布

▻ポートフォリオの損益分布の算出手順

▻本研究で扱う問題

▻現在一般的な手法

▻現在一般的な手法 — 多変量正規分布の利用

▻現在一般的な手法 — HS 法

▻現在一般的な手法 — その他の手法

正規直交多項式系と分布展開法

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

今後の課題・論点など

- **その他の手法は、一般的に、X の分布の特徴を多変量正規分布よりも上手く捉え得るものの、(1) 式の積分計算などの扱いは、より困難**

$\Rightarrow$ **本研究では比較検討の対象には含めない**

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

▻正規直交多項式系
▻分布展開法による密度関数の近似
▻エルミート展開・ラゲール展開
▻分布展開法の性質
▻分布展開法に関する工夫
▻分布展開法に関する工夫 — 基準化・ラゲール展開の利用
▻分布展開法に関する工夫 — 最適化
▻数値例 (N225 IV)
▻数値例 (N225 IV plots)
▻分布展開法のまとめ

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

今後の課題・論点など

正規直交多項式系と分布展開法

正規直交多項式系

▻本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
正規直交多項式系と分布展開法
▻正規直交多項式系
▻分布展開法による密度関数の近似
▻エルミート展開・ラゲール展開
▻分布展開法の性質
▻分布展開法に関する工夫
▻分布展開法に関する工夫 — 基準化・ラゲール展開の利用
▻分布展開法に関する工夫 — 最適化
▻数値例 (N225 IV)
▻数値例 (N225 IV plots)
▻分布展開法のまとめ
分布展開法の市場リスク計測への応用
多変量の分布展開法
今後の課題・論点など

- g_k を k 次多項式として、その列 $\{g_k; k = 0, 1, \ldots\}$ を考える
- 重み付け関数 w: 定義域 $\mathcal{S} \in \mathrm{R}$ を持つ非負の関数で、$\int_{\mathcal{S}} w(u)\mathrm{d}u = 1$ を満たすもの
- $\{g_k\}$ と w が

$$\int_{\mathcal{S}} w(u) g_k(u) g_l(u) \mathrm{d}u = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ e_k > 0 & (k = l) \end{cases}$$

  を満たすとき、$(w, \{g_k\})$ を直交多項式系という
- $e_k = 1,\ k = 0, 1, \ldots$ のとき、$(w, \{g_k\})$ を特に正規直交多項式系という
- 任意の直交多項式系 $(w, \{g_k\})$ に対し、$(w, \{g_k/\sqrt{e_k}\})$ は正規直交多項式系 ⇒ 一般性を失うことなく、正規直交多項式系のみを扱うことができる

分布展開法による密度関数の近似

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

▻正規直交多項式系

▻分布展開法による密度関数の近似

▻エルミート展開・ラゲール展開

▻分布展開法の性質

▻分布展開法に関する工夫

▻分布展開法に関する工夫 — 基準化・ラゲール展開の利用

▻分布展開法に関する工夫 — 最適化

▻数値例 (N225 IV)

▻数値例 (N225 IV plots)

▻分布展開法のまとめ

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

今後の課題・論点など

- **定義域 S を持つ 1 変量の確率変数 X の密度関数 f が、正規直交多項式系 $(w, \{g_k\})$ と実数の係数 $C_0, C_1, \ldots$ を使って**

$$f(x) = w(x) \sum_{k=0}^{\infty} C_k g_k(x) \tag{2}$$

と展開されたとする

- **正規直交性より $C_k = \int_S g_k(u) f(u) \mathrm{d}u = \mathrm{E}(g_k(X))$ は X の k 次までの積率の線形結合**

- **特に、$C_0 = \mathrm{E}(g_0(X)) = 1$**

- **X の n 次までの積率が与えられた場合に、(2) 式を有限和**

$$f(x) \simeq \hat{f}(x) = w(x) \sum_{k=0}^{n} \mathrm{E}(g_k(X)) g_k(x) \tag{3}$$

で近似することが可能 (分布展開法による近似)

エルミート展開・ラゲール展開

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

▻正規直交多項式系

▻分布展開法による密度関数の近似

▻エルミート展開・ラゲール展開

▻分布展開法の性質

▻分布展開法に関する工夫

▻分布展開法に関する工夫 — 基準化・ラゲール展開の利用

▻分布展開法に関する工夫 — 最適化

▻数値例 (N225 IV)

▻数値例 (N225 IV plots)

▻分布展開法のまとめ

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

今後の課題・論点など

- **定義域 $S = (-\infty, \infty)$ に対してはエルミート多項式系がよく利用される**

$$w(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$g_k(x) = \mathrm{He}_k(x) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!}} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

- **定義域 $S = [0, \infty)$ に対してはラゲール多項式系がよく利用される**

$$w(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} \mathrm{e}^{-x}$$

$$g_k(x) = L_k^{(\beta-1)}(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(k+\beta)}} \sum_{l=0}^{k} \binom{k+\beta-1}{k-l} \frac{(-x)^l}{l!}$$

分布展開法の性質

▻本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
正規直交多項式系と分布展開法
▻正規直交多項式系
▻分布展開法による密度関数の近似
▻エルミート展開・ラゲール展開
▻分布展開法の性質
▻分布展開法に関する工夫
▻分布展開法に関する工夫 — 基準化・ラゲール展開の利用
▻分布展開法に関する工夫 — 最適化
▻数値例 (N225 IV)
▻数値例 (N225 IV plots)
▻分布展開法のまとめ
分布展開法の市場リスク計測への応用
多変量の分布展開法
今後の課題・論点など

$$f(x) \simeq \hat{f}(x) = w(x) \sum_{k=0}^{n} \mathrm{E}(g_k(X)) g_k(x)$$

$(+)$ **目標とする分布の積率のみから構成できる**

- **目標が一連の標本として与えられても、モデルとして与えられても、積率を算出すれば近似が構成可能**

$(-)$ **多項式を利用しており、密度関数の近似が負値を取る場合を排除していない**

- n **次方程式** $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{E}(g_k(X)) g_k(x) = 0$ **が重解以外の実数解を持つ場合、** $\hat{f}$ **は負値を取る**
- **この影響は、密度関数が零に近い値を取る分布の裾の部分で特に大きい可能性**

$\Rightarrow$ **分布展開法を応用するには、この脆弱性を補強する工夫が必要**

分布展開法に関する工夫

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

▻正規直交多項式系
▻分布展開法による密度関数の近似
▻エルミート展開・ラゲール展開
▻分布展開法の性質
▻分布展開法に関する工夫
▻分布展開法に関する工夫 — 基準化・ラゲール展開の利用
▻分布展開法に関する工夫 — 最適化
▻数値例 (N225 IV)
▻数値例 (N225 IV plots)
▻分布展開法のまとめ

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

今後の課題・論点など

- **分布展開法の脆弱性を補う方法の中で現在最も注目されているものは、鞍点近似法**
  - **扱いやすい形のキュムラント母関数が必要**
- **本研究では、鞍点近似法ではなく、以下の 3 つの工夫を考える**
  - **基準化**
  - **ラゲール展開の利用**
  - **最適化**

分布展開法に関する工夫 — 基準化・ラゲール展開の利用

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

▻正規直交多項式系

▻分布展開法による密度関数の近似

▻エルミート展開・ラゲール展開

▻分布展開法の性質

▻分布展開法に関する工夫

▻分布展開法に関する工夫 — 基準化・ラゲール展開の利用

▻分布展開法に関する工夫 — 最適化

▻数値例 (N225 IV)

▻数値例 (N225 IV plots)

▻分布展開法のまとめ

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

今後の課題・論点など

$$f(x) \simeq \hat{f}(x) = w(x) + w(x)\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(g_k(X))g_k(x)$$

f と w が似ていれば多項式の影響が小さくなることが期待できる

- 基準化 (期待値 $\mu = \mathrm{E}(X)$ と分散 $\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2$ を調整)
  - $X' = (X - \mu)/\sigma$ (エルミート)、$\beta = \mu^2/\sigma^2$ として $X'_L = \beta X/\mu$ (ラゲール)
- ラゲール展開の利用 (損益や収益率など正負両方の値を取り得る変数には、エルミート展開の適用が自然であるが、これらの裾は正規分布よりも重いことが多い)
  - $M > 0$ を十分に大きい定数として $X_L = X + M$ が非負であるとみなせればラゲール展開は適用可能
  - $X_{L^*} = (X + M)^2$ とすれば $X_{L^*} \geq 0$

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

▻正規直交多項式系

▻分布展開法による密度関数の近似

▻エルミート展開・ラゲール展開

▻分布展開法の性質

▻分布展開法に関する工夫

▻分布展開法に関する工夫 — 基準化・ラゲール展開の利用

▻分布展開法に関する工夫 — 最適化

▻数値例 (N225 IV)

▻数値例 (N225 IV plots)

▻分布展開法のまとめ

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

今後の課題・論点など

Hall (1983) **が離散分布について導入した手法を連続分布に応用**

$C_k = \mathrm{E}(g_k(X))$ **として、**C_k **と** C_k^2 **の不偏推定量** $\hat{C}_k, \hat{C_k^2}$ **が利用可能な場合に、非負の係数** $\alpha_k,\ k = 0, 1, \ldots, n$ **を使った近似を考える**

$$\hat{f}(x) = w(x) \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \hat{C}_k g_k(x)$$

近似と目標の密度関数の距離

$$\mathrm{E}\left(\int_{\mathcal{S}} \left\{ \hat{f}(u) - f(u) \right\}^2 / w(u) \mathrm{d}u \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left\{ \alpha_k^2 \mathrm{E}\left(\left(\hat{C}_k \right)^2 \right) - 2\alpha_k C_k^2 \right\} + \mathrm{Const.}$$

これの不偏推定量を最小にするのは

$$\alpha_k = \hat{C_k^2} / \left(\hat{C}_k \right)^2$$

数値例 (N225 IV)

▻本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
正規直交多項式系と分布展開法
▻正規直交多項式系
▻分布展開法による密度関数の近似
▻エルミート展開・ラゲール展開
▻分布展開法の性質
▻分布展開法に関する工夫
▻分布展開法に関する工夫 — 基準化・ラゲール展開の利用
▻分布展開法に関する工夫 — 最適化
▻数値例 (N225 IV)
▻数値例 (N225 IV plots)
▻分布展開法のまとめ
分布展開法の市場リスク計測への応用
多変量の分布展開法
今後の課題・論点など

日経 225 **オプション** (3M, ATM) **のインプライド・ボラティリティ変化率の経験分布** (**標本数** 500) **を目標として、各種分布展開法を適用**

- **適合度の指標** (root mean squared error)

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{F}(x^{(i)}) - S(x^{(i)})\right)^2}$$

- **負の確率密度の総面積** (total area of negative density)

$$\mathrm{TAND} = -\int_{\hat{f}(x)<0}\hat{f}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathcal{S}}|\hat{f}(x)|\mathrm{d}x - 1\right)$$

	RMSE ($\times 10^{-2}$)	TAND
Hermite	2.965	8.010×10^{-3}
Hermite$^{\mathrm{o}}$	0.931	1.046×10^{-6}
Laguerre*	1.359	1.931×10^{-6}
正規分布	2.271	0

Table 1: **各種近似の比較**

数値例 (N225 IV plots)

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

▻正規直交多項式系

▻分布展開法による密度関数の近似

▻エルミート展開・ラゲール展開

▻分布展開法の性質

▻分布展開法に関する工夫

▻分布展開法に関する工夫 — 基準化・ラゲール展開の利用

▻分布展開法に関する工夫 — 最適化

▻数値例 (N225 IV)

▻数値例 (N225 IV plots)

▻分布展開法のまとめ

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

今後の課題・論点など

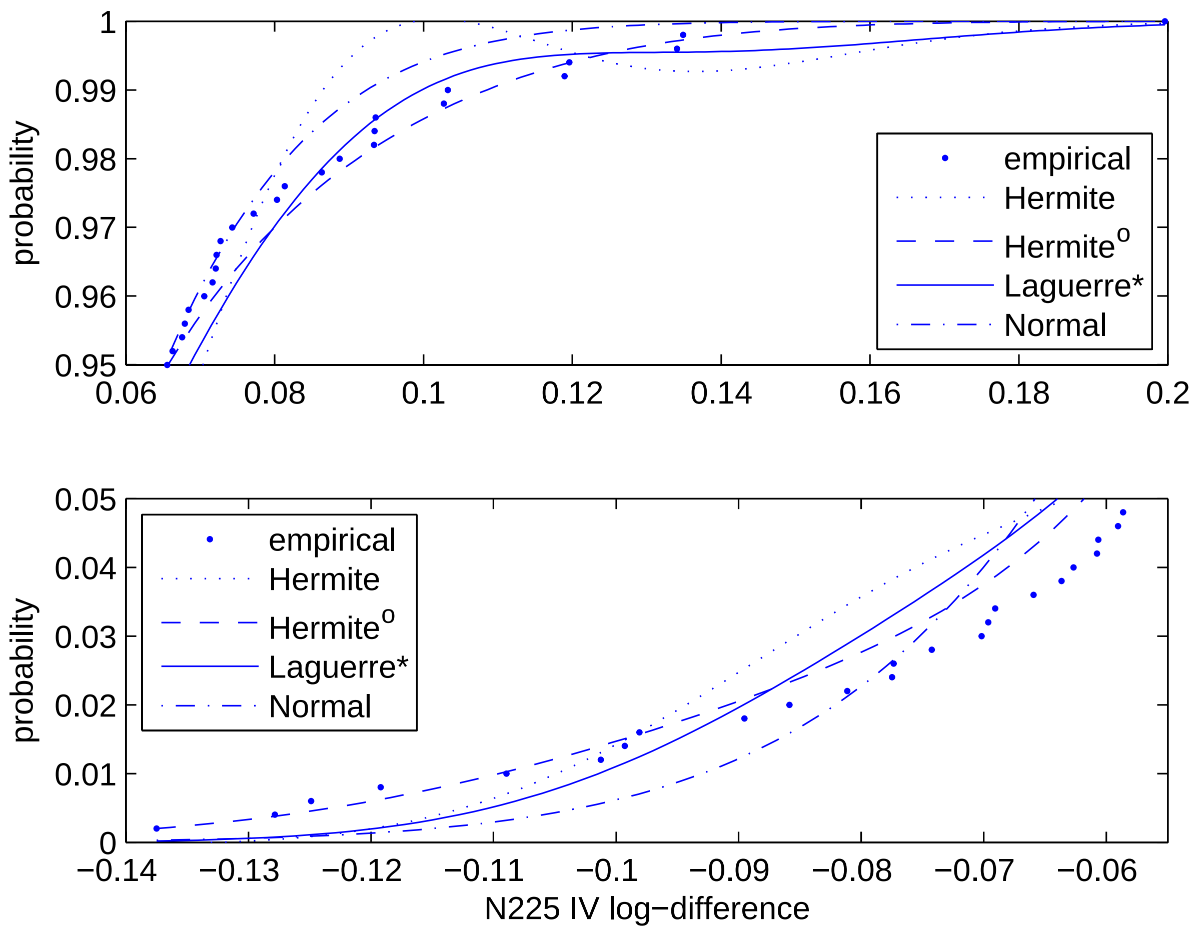

Figure 2: **日経 225 オプションのインプライド・ボラティリティ変化率の経験分布と、各種近似の比較**

分布展開法のまとめ

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

▻正規直交多項式系

▻分布展開法による密度関数の近似

▻エルミート展開・ラゲール展開

▻分布展開法の性質

▻分布展開法に関する工夫

▻分布展開法に関する工夫 — 基準化・ラゲール展開の利用

▻分布展開法に関する工夫 — 最適化

▻数値例 (N225 IV)

▻数値例 (N225 IV plots)

▻分布展開法のまとめ

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

今後の課題・論点など

- 正規直交多項式系を使って、密度関数を近似
- 目標の分布の積率のみが必要
  - 目標がモデルであっても一連の標本であっても適用が可能
- 最大の欠点である負の確率密度の影響は、基準化・ラゲール展開の利用・最適化、といった工夫を施すことによってある程度軽減

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

分布展開法の市場リスク計測への応用

▻長期間のリスク計測

▻ポートフォリオの損益分布

▻数値例 (N225 Call)

▻数値例 (N225 Call plots)

▻分布展開法の市場リスク計測への応用 — まとめ

多変量の分布展開法

今後の課題・論点など

分布展開法の市場リスク計測への応用

長期間のリスク計測

▻本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
正規直交多項式系と分布展開法
分布展開法の市場リスク計測への応用
▻長期間のリスク計測
▻ポートフォリオの損益分布
▻数値例 (N225 Call)
▻数値例 (N225 Call plots)
▻分布展開法の市場リスク計測への応用 — まとめ
多変量の分布展開法
今後の課題・論点など

- $\{X^1(t)\}$: **リスク評価期間 1 日のリスク・ファクターの時系列**
- $X^T = X^1(1) + \cdots + X^1(T)$ **とすると、** X^T **の積率は**

$$\mathrm{E}\left((X^T)^k\right) = \sum_{k_1+\cdots+k_T=k} \frac{k!}{k_1!\cdots k_T!} \mathrm{E}\left(X^1(1)^{k_1}\cdots X^1(T)^{k_T}\right)$$

のように $\{X^1(t)\}$ **の自己交差積率を使って表わされる**

- **特に** $\{X^1(t)\}$ **が** iid **であれば**

$$\mathrm{E}\left((X^T)^k\right) = \sum_{k_1+\cdots+k_T=k} \frac{k!}{k_1!\cdots k_T!} \mathrm{E}\left(X^1(1)^{k_1}\right)\cdots \mathrm{E}\left(X^1(1)^{k_T}\right)$$

$\Rightarrow$ **リスク評価期間が** T **日のリスク・ファクターの分布にも分布展開法は適用可能**

ポートフォリオの損益分布

▻本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
正規直交多項式系と分布展開法
分布展開法の市場リスク計測への応用
▻長期間のリスク計測
▻ポートフォリオの損益分布
▻数値例 (N225 Call)
▻数値例 (N225 Call plots)
▻分布展開法の市場リスク計測への応用 — まとめ
多変量の分布展開法
今後の課題・論点など

ポートフォリオの損益が $Z = d(X_1, X_2)$ のように 2 つのリスク・ファクターに依存する例

- **関数 d が $d(x) \simeq \sum_{i,j} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x_1^i \partial x_2^j} d(0,0) x_1^i x_2^j = \sum_{i,j} D_{ij} x_1^i x_2^j$ のように有限和で近似される場合**
- **ポートフォリオの損益 $Z \simeq \sum_{i,j} D_{ij} X_1^i X_2^j$**
- **積率の近似**

$$\mathrm{E}\left(Z^k\right) \simeq \mathrm{E}\left(\left(\sum_{i,j} D_{ij} X_1^i X_2^j\right)^k\right) = \sum_{i',j'} D'_{i'j'} \mathrm{E}\left(X_1^{i'} X_2^{j'}\right)$$

$\Rightarrow$ **X_1 と X_2 の交差積率が利用可能であれば、分布展開法の適用が可能で、ポートフォリオの損益分布が近似できる**

数値例 (N225 Call)

▻本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
正規直交多項式系と分布展開法
分布展開法の市場リスク計測への応用
▻長期間のリスク計測
▻ポートフォリオの損益分布
▻数値例 (N225 Call)
▻数値例 (N225 Call plots)
▻分布展開法の市場リスク計測への応用 — まとめ
多変量の分布展開法
今後の課題・論点など

非線形・複数のリスク・ファクターに晒されたポートフォリオの例として、日経 225 **コール・オプション** (3M, ATM) **の損益分布を考える**

- **リスク評価期間を** $T = 1$ **日として、**HS **法による損益分布を目標に設定**
- **原資産価格と** IV **の変化率をリスク・ファクターとする**
- **ブラック・ショールズ式を** 2 **次まで展開** (**デルタ、ベガ、ガンマ**)

	RMSE $(\times 10^{-2})$	TAND $(\times 10^{-4})$
Hermite	1.721	1.671
Hermite$^{\mathrm{o}}$	2.255	2.048
Laguerre*	1.841	0.022
正規分布	3.425	0

Table 2: **各種近似の比較**

数値例 (N225 Call plots)

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

分布展開法の市場リスク計測への応用

▻長期間のリスク計測

▻ポートフォリオの損益分布

▻数値例 (N225 Call)

▻数値例 (N225 Call plots)

▻分布展開法の市場リスク計測への応用 — まとめ

多変量の分布展開法

今後の課題・論点など

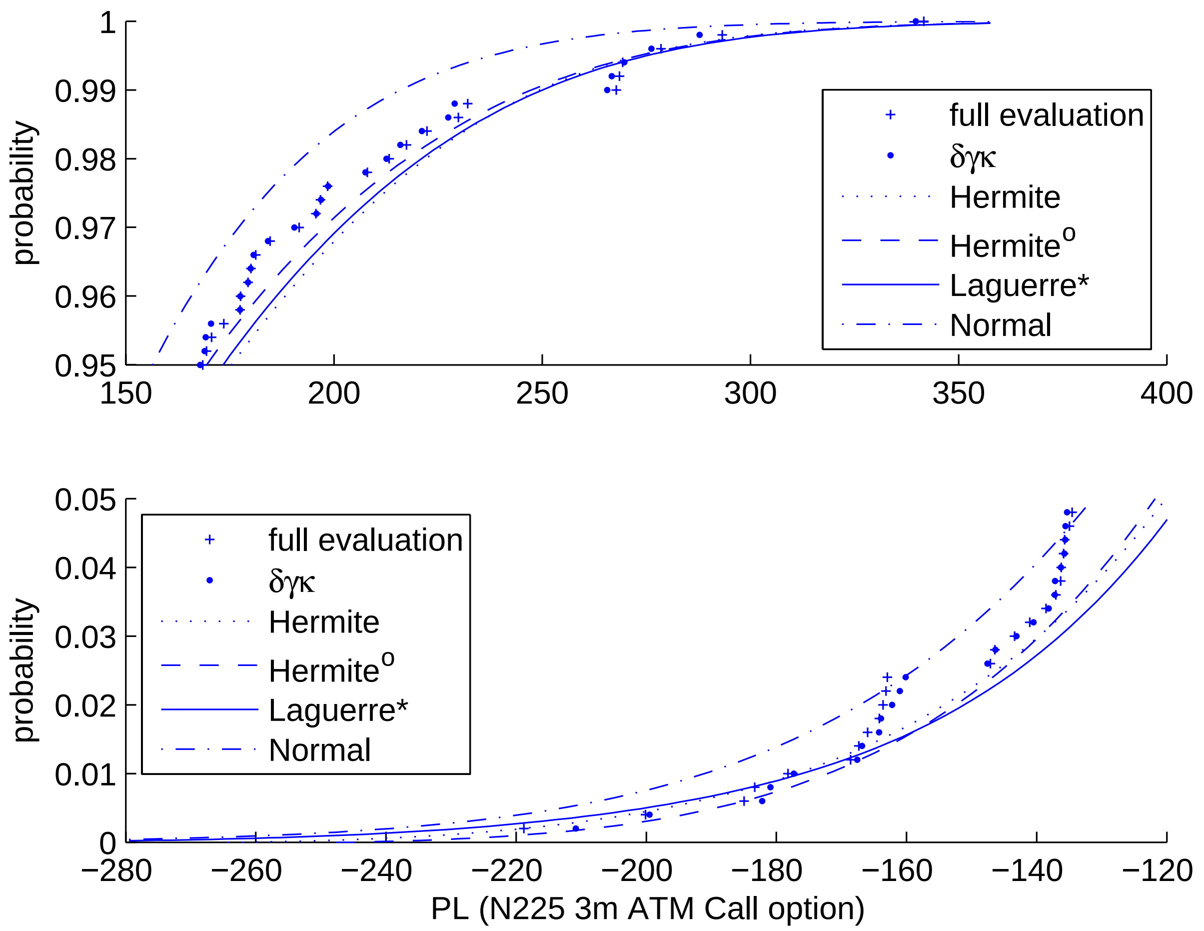

Figure 3: HS **法による日経** 225 **オプションの損益分布とそれに対する各種近似の比較**

分布展開法の市場リスク計測への応用 — まとめ

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

分布展開法の市場リスク計測への応用

▻長期間のリスク計測

▻ポートフォリオの損益分布

▻数値例 (N225 Call)

▻数値例 (N225 Call plots)

▻分布展開法の市場リスク計測への応用 — まとめ

多変量の分布展開法

今後の課題・論点など

- リスク・ファクターの分布の特徴は、積率と交差積率に要約される
  - HS 法が苦手とする、リスク・ファクターがモデルとして与えられている場合への対応も可能
- リスク評価期間が長い場合でも、自己交差積率があれば対応が可能
- 非線形なポートフォリオに対しても、多項式による近似が可能であれば対応が可能
- 数値例では、HS 法による損益分布を相応の精度で近似し得ることが示された

▻本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
正規直交多項式系と分布展開法
分布展開法の市場リスク計測への応用
多変量の分布展開法
▻2 変量の分布展開
▻数値例 (N225 plots)
▻条件付期待値
▻条件付期待値の数値例 (N225 plots)
▻同時密度関数の裾
▻コピュラ密度の近似
▻数値例 — N225 copula density
▻数値例 — Clayton copula density
▻Clayton copula density
▻一般の多変量への拡張
今後の課題・論点など

多変量の分布展開法

2 変量の分布展開

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

▻2 変量の分布展開

▻数値例 (N225 plots)

▻条件付期待値

▻条件付期待値の数値例 (N225 plots)

▻同時密度関数の裾

▻コピュラ密度の近似

▻数値例 — N225 copula density

▻数値例 — Clayton copula density

▻Clayton copula density

▻一般の多変量への拡張

今後の課題・論点など

2 つの確率変数 (X, Y) の同時密度関数を f とすると

$$f(x, y) \simeq \hat{f}(x, y) = w(x)w(y) \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \mathrm{E}(g_k(X)g_l(Y))g_k(x)g_l(y)$$

のような近似が考えられる

- この近似は X と Y の交差積率から構成することができる
- これに対しても、基準化、ラゲール展開の利用、最適化が適用可能

数値例 (N225 plots)

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

▻2 変量の分布展開

▻数値例 (N225 plots)

▻条件付期待値

▻条件付期待値の数値例 (N225 plots)

▻同時密度関数の裾

▻コピュラ密度の近似

▻数値例 — N225 copula density

▻数値例 — Clayton copula density

▻Clayton copula density

▻一般の多変量への拡張

今後の課題・論点など

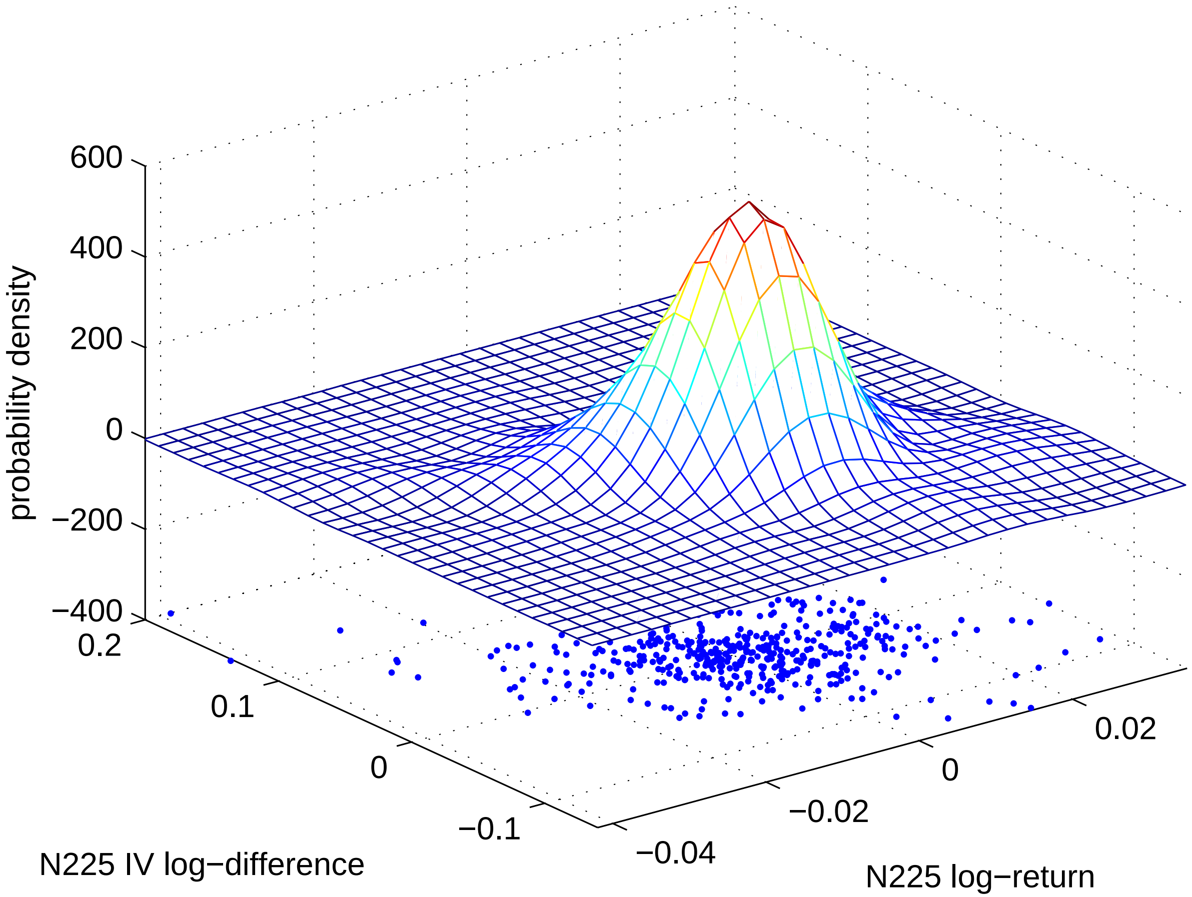

Figure 4: 2 変量のエルミート展開 (基準化、最適化) を (N225, N225 IV) の 500 個の標本に当てはめたもの

条件付期待値

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

▻2 変量の分布展開

▻数値例 (N225 plots)

▻条件付期待値

▻条件付期待値の数値例 (N225 plots)

▻同時密度関数の裾

▻コピュラ密度の近似

▻数値例 — N225 copula density

▻数値例 — Clayton copula density

▻Clayton copula density

▻一般の多変量への拡張

今後の課題・論点など

$X = x$ で条件付けした $g_q(Y)$ の期待値を考える

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(g_q(Y)|X = x) &= \frac{\int_S g_q(y) f(x,y)\mathrm{d}y}{\int_S f(x,y)\mathrm{d}y} \\
&= \frac{\int_S g_q(y) w(x) w(y) \sum_{k,l=0}^{\infty} C_{kl}^{XY} g_k(x) g_l(y)\mathrm{d}y}{w(x)\sum_{k=0}^{\infty} C_k^X g_k(x)} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} C_{kq}^{XY} g_k(x)}{\sum_{k=0}^{\infty} C_k^X g_k(x)} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

ただし、 $C_{kl}^{XY} = \mathrm{E}(g_k(X) g_l(Y))$, $C_k^X = \mathrm{E}(g_k(X))$

- (4) **式の無限和を有限和で近似**
- **これに対しても基準化、ラゲール展開の利用、最適化 が適用可能**

条件付期待値の数値例 (N225 plots)

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

▻2 変量の分布展開

▻数値例 (N225 plots)

▻条件付期待値

▻条件付期待値の数値例 (N225 plots)

▻同時密度関数の裾

▻コピュラ密度の近似

▻数値例 — N225 copula density

▻数値例 — Clayton copula density

▻Clayton copula density

▻一般の多変量への拡張

今後の課題・論点など

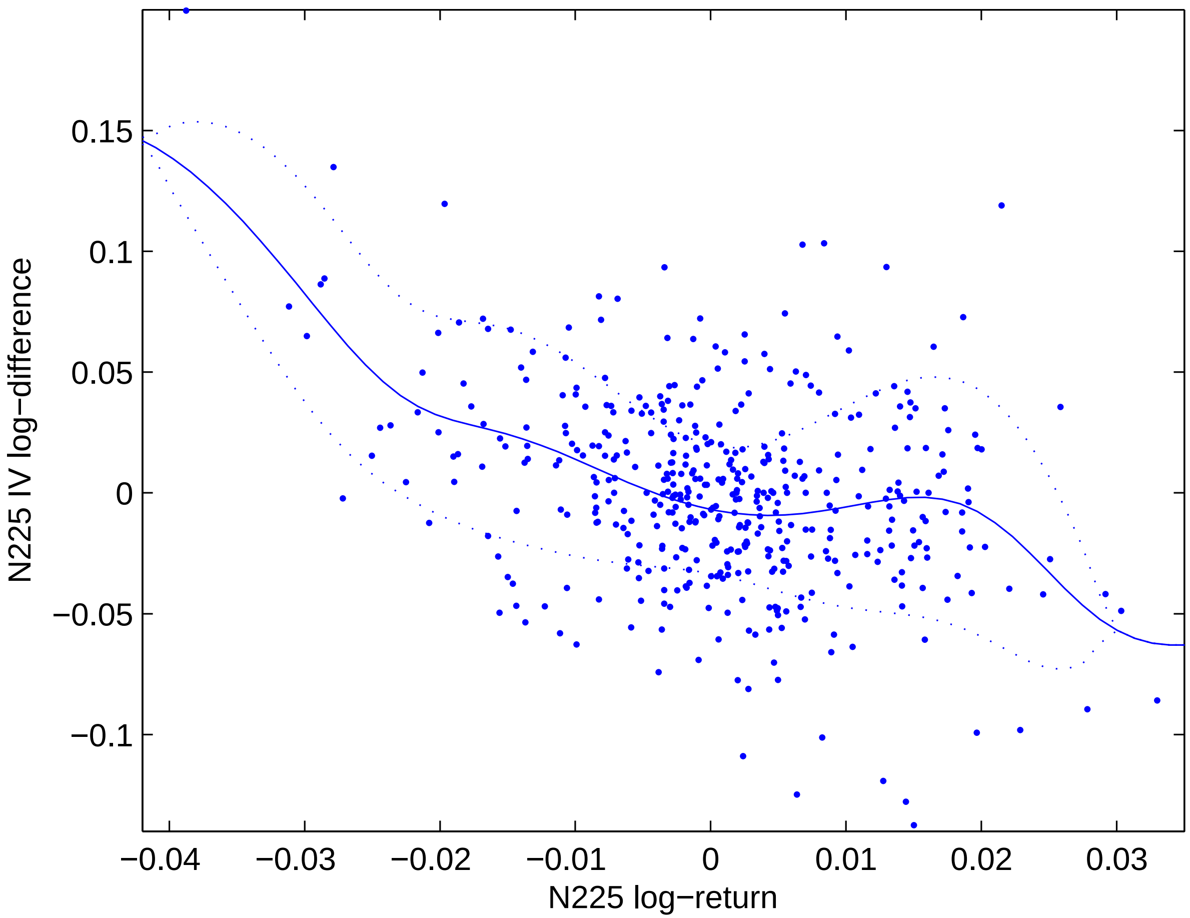

Figure 5: N225 の値で条件付けされた N225 IV の期待値 (実線) と、同じく条件付けされた期待値 ± 条件付けされた標準偏差 (点線) (基準化および最適化が施されたエルミート展開)

同時密度関数の裾

▻本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
正規直交多項式系と分布展開法
分布展開法の市場リスク計測への応用
多変量の分布展開法
▻2 変量の分布展開
▻数値例 (N225 plots)
▻条件付期待値
▻条件付期待値の数値例 (N225 plots)
▻同時密度関数の裾
▻コピュラ密度の近似
▻数値例 — N225 copula density
▻数値例 — Clayton copula density
▻Clayton copula density
▻一般の多変量への拡張
今後の課題・論点など

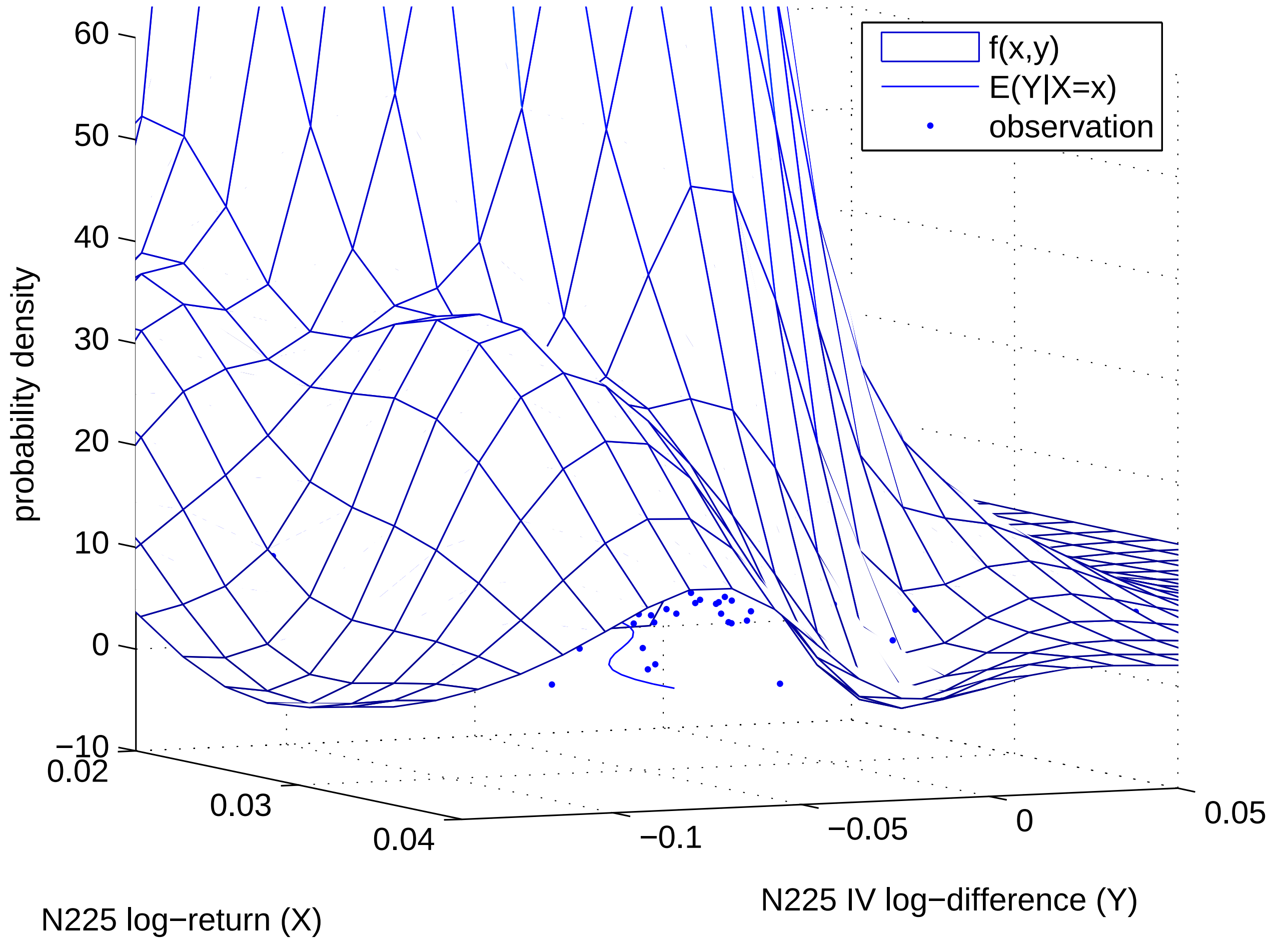

Figure 6: Figure 4 の一部を拡大したもの

▻本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
正規直交多項式系と分布展開法
分布展開法の市場リスク計測への応用
多変量の分布展開法
▻2 変量の分布展開
▻数値例 (N225 plots)
▻条件付期待値
▻条件付期待値の数値例 (N225 plots)
▻同時密度関数の裾
▻コピュラ密度の近似
▻数値例 — N225 copula density
▻数値例 — Clayton copula density
▻Clayton copula density
▻一般の多変量への拡張
今後の課題・論点など

コピュラ密度 c の展開を考える

$$c(F_X(x), F_Y(y)) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)f_Y(y)} = \frac{\sum_{k,l} C_{kl}^{XY} g_k(x)g_l(y)}{\sum_{k,l} C_k^X C_l^Y g_k(x)g_l(y)}$$

あるいは

$$c(u,v) = \frac{\sum_{k,l} C_{kl}^{XY} g_k(F_X^{-1}(u))g_l(F_Y^{-1}(v))}{\sum_{k,l} C_k^X C_l^Y g_k(F_X^{-1}(u))g_l(F_Y^{-1}(y))}$$

- **無限和を有限和で近似**
- **これに対しても基準化、ラゲール展開の利用、最適化 が適用可能**

数値例 — N225 copula density

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

▻2 変量の分布展開

▻数値例 (N225 plots)

▻条件付期待値

▻条件付期待値の数値例 (N225 plots)

▻同時密度関数の裾

▻コピュラ密度の近似

▻数値例 — N225 copula density

▻数値例 — Clayton copula density

▻Clayton copula density

▻一般の多変量への拡張

今後の課題・論点など

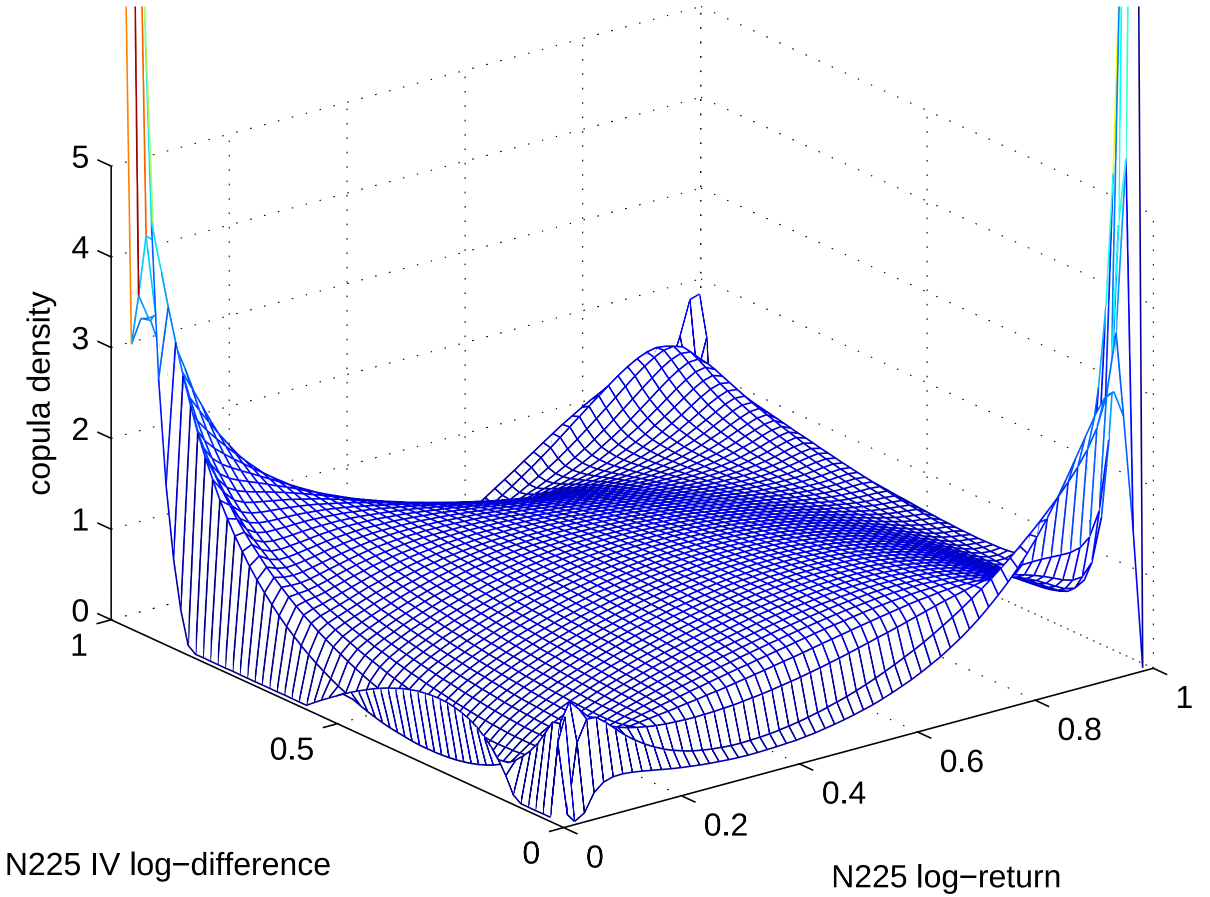

Figure 7: **基準化及び最適化されたエルミート展開によって得られた (N225, N225 IV) のコピュラ密度の近似**

数値例 — Clayton copula density

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

▻2 変量の分布展開

▻数値例 (N225 plots)

▻条件付期待値

▻条件付期待値の数値例 (N225 plots)

▻同時密度関数の裾

▻コピュラ密度の近似

▻数値例 — N225 copula density

▻数値例 — Clayton copula density

▻Clayton copula density

▻一般の多変量への拡張

今後の課題・論点など

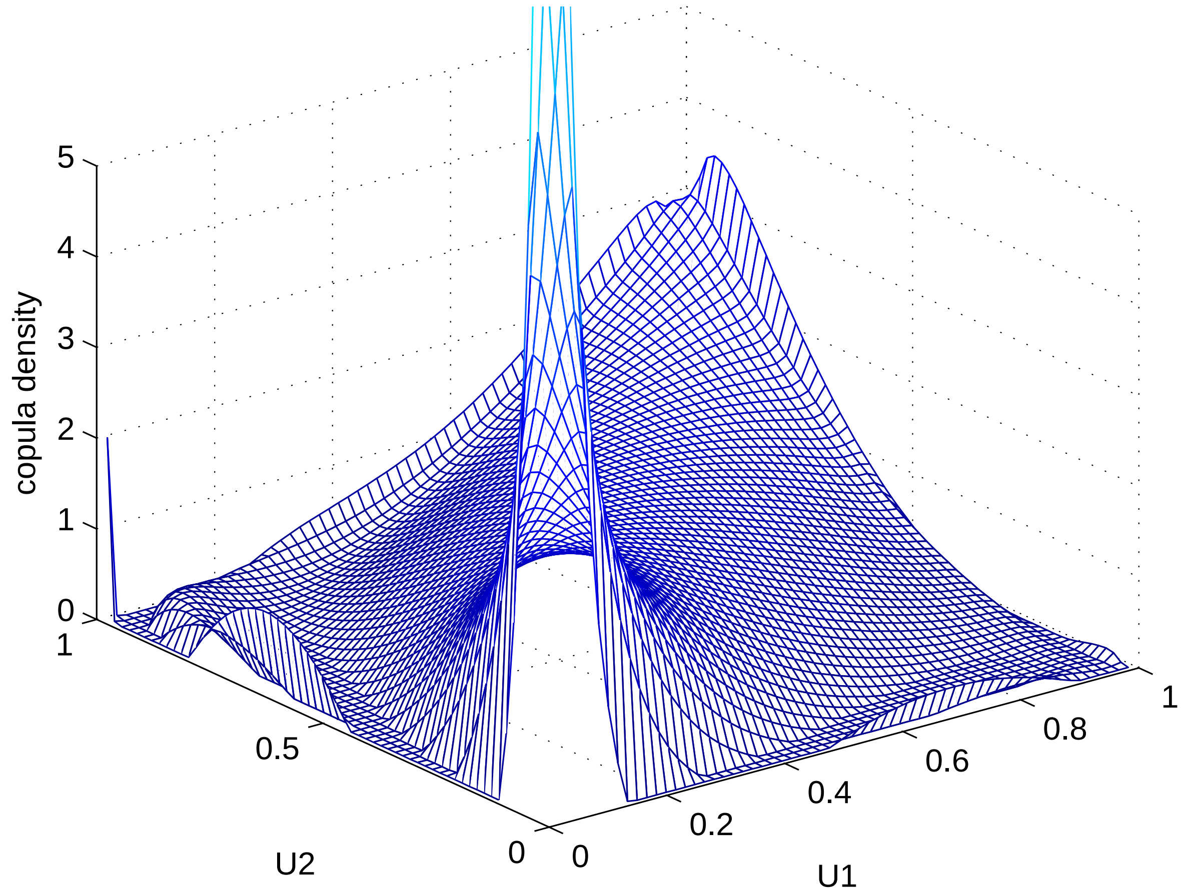

Figure 8: 2 次元のクレイトン・コピュラから 500 個の擬似乱数を発生させ、基準化・最適化されたエルミート展開を当てはめて得られたコピュラ密度の近似: 次スライドに示した理論値と比較すると、不安定な裾の部分を除いて、大まかな特徴が捉えられていることが分かる

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

▻2 変量の分布展開

▻数値例 (N225 plots)

▻条件付期待値

▻条件付期待値の数値例 (N225 plots)

▻同時密度関数の裾

▻コピュラ密度の近似

▻数値例 — N225 copula density

▻数値例 — Clayton copula density

▻Clayton copula density

▻一般の多変量への拡張

今後の課題・論点など

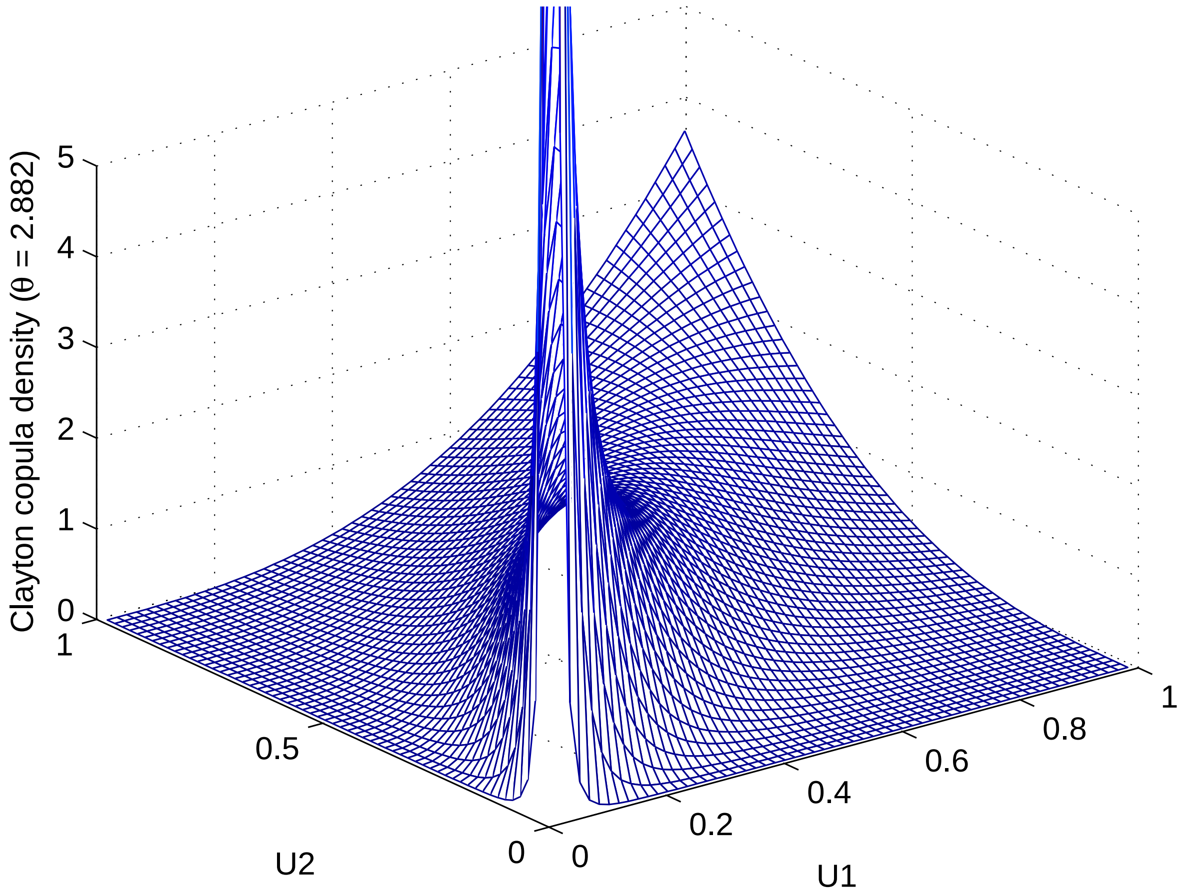

Figure 9: 2 次元のクレイトン・コピュラ密度関数 (理論値)

一般の多変量への拡張

▻本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

▻2 変量の分布展開

▻数値例 (N225 plots)

▻条件付期待値

▻条件付期待値の数値例 (N225 plots)

▻同時密度関数の裾

▻コピュラ密度の近似

▻数値例 — N225 copula density

▻数値例 — Clayton copula density

▻Clayton copula density

▻一般の多変量への拡張

今後の課題・論点など

- $f(x_1, \ldots, x_p)$ を p 変量の確率変数 $(X_1, \ldots, X_p)$ の同時密度関数とする
- 2 変量の場合と同様

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_p) &= w(x_1) \cdots w(x_p) \\
&\quad \times \sum_{k_1, \ldots, k_p} \mathrm{E}(g_{k_1}(X_1) \cdots g_{k_p}(X_p)) g_{k_1}(x_1) \cdots g_{k_p}(x_p)
\end{aligned}
$$

  のような展開が可能

- これに対しても、基準化、ラゲール展開の利用、最適化を考えることができる
- 条件付期待値やコピュラ密度の近似も可能

— ただし、数値例などによる精度の検証は未実施

▻本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
正規直交多項式系と分布展開法
分布展開法の市場リスク計測への応用
多変量の分布展開法
今後の課題・論点など
▻今後の課題・論点など
▻References

今後の課題・論点など

今後の課題・論点など

➢本日の概要

市場リスク計測とその技術的な側面

正規直交多項式系と分布展開法

分布展開法の市場リスク計測への応用

多変量の分布展開法

今後の課題・論点など

➢今後の課題・論点など

➢References

- 実務からの観点 — 非線形・非正規のリスクを捕捉する必要性がどの程度あるのか
- 直交多項式系の利用について
  - $w(x)\sum_{k=0}^{\infty} C_k g_k(x)$ はしばしば収束しない
  - 負の確率密度の影響を軽減する更なる工夫
  - リスク・ファクターの情報を積率・交差積率に集約すること— 高次の積率が存在しないようなモデルもある
- 多変量の分布展開について
  - 近似精度の検証が未実施
  - さらなる応用
- 与信ポートフォリオのリスク計測への応用

References

➢本日の概要
市場リスク計測とその技術的な側面
正規直交多項式系と分布展開法
分布展開法の市場リスク計測への応用
多変量の分布展開法
今後の課題・論点など
➢今後の課題・論点など
➢References

Hall, P. (1983), 'Orthogonal series methods for both qualitative and quantitative data', *The Annals of Statistics* **11**(3), 1004–1007.

Marumo, K. (2007), Expansion Methods Applied to Distributions and Risk Measurement in Financial Markets, PhD thesis, School of Economics and Finance, Queensland University of Technology, Australia.

Marumo, K. and Wolff, R. (2007), 'Expansion methods applied to asset return distributions', *Journal of Risk* **10**(2), 3–24.

- 本資料に記載している内容について、他の公表物に転載・複製する場合には、あらかじめ日本銀行金融機構局金融高度化センターまで連絡し、承諾を得て下さい
- 本資料に掲載されている情報の正確性については万全を期しておりますが、日本銀行金融機構局金融高度化センターは本資料の利用者が本資料の情報を用いて行う一切の行為について、何ら責任を負うものではありません